

Приложение к журналу

КВАНТ

№2/2002

МАТЕМАТИКА И ИГРЫ

Бюро  Квантум

МАТЕМАТИКА И ИГРЫ

Составитель А.Ю.Котова



Москва 2002
Бюро Квантум

М33 Математика и игра. — М.: Бюро Квантум, 2002. — 128 с. — (Прил. к журналу «Квант» №2/2002)
ISBN 5-85843-038-4

Книга составлена из статей логической тематики, публиковавшихся в «Кванте» в разные годы. Все они так или иначе связаны с играми: игры как математическая модель; выигрышные стратегии для хорошо изученных игр, в которых возникают самые различные математические понятия; наконец, просто интеллектуальные игры (как, например, го).

Книга предназначена для широкого круга читателей, от любителей математики и участников математических кружков до любителей всевозможных интеллектуальных игр.

ББК 22.1

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
Теория игр. <i>З.Тъмеладзе</i>	5
Игры с квадратичными функциями. <i>Б. Вертгейм</i>	16
Игра «Жизнь». <i>И. Клумова</i>	24
Ставь на минус! <i>А. Орлов</i>	33
«Ферзя – в угол», «цзяньшицзы» и числа Фибоначчи. <i>А. Матулис, А. Савукина</i>	41
Игра «Определитель». <i>В. Переяславский</i>	49
Игра в 15. <i>О. Долгов</i>	56
Лучшее пари для простаков. <i>П. Певзнер</i>	68
Переключательная игра Шеннона. <i>Е. Глушанков, П. Певзнер</i>	78
Шахматно-математические заметки. <i>Е. Гик</i>	89
Игра го. <i>Е. Гик, А. Попов</i>	96
Крестики и нолики. <i>Е. Гик</i>	116
Игра шакур. <i>С. Коновалов</i>	121
Ответы	126

ПРЕДИСЛОВИЕ

В эту книжку вошли статьи, опубликованные в разные годы в журнале «Квант». Все они так или иначе – об играх. Часть из них – вполне научные статьи, в которых рассказывается об играх, моделирующих те или иные задачи. Часть статей посвящена выигрышным стратегиям в играх, давно изученных математиками. В таких играх оказываются задействованы самые разнообразные математические понятия. Но когда игра полностью изучена, в нее уже неинтересно играть. Поэтому в книге содержатся и описания неизученных игр, которые, надеемся, доставят удовольствие читателю.

Книга может оказаться интересной читателям самых разных возрастов и склонностей: и любителям математики, и участникам математических кружков, и любителям интеллектуальных игр.

Верда или Калимна?

Еще никогда за все сто гартов Великой Войны при штабе сиреневых не совещались так долго. Пары окиси молибдена клубились над группой генералов, ожесточенно споривших у доски со следующей таблицей:

Потери дрокеров

Наша стратегия \ Стратегия фиолетовых	Атака на Калимну	Обстрел Верды
	6	3
Защита Верды		
Защита Калимны	1	5

Генералиссимус Дор покосился на табличку «Здесь молибден не окисляют», но не стал взывать к ней, а лишь молча кивнул Мотсу, предоставляя ему слово.

– У фиолетовых может быть только два плана: или звездолетная атака на Калимну, или обстрел... – генерал Мотс закашлялся («угробит его в конце концов это пристрастие к молибдену», – подумал Дор, но Мотс уже продолжал) – ... или обстрел Верды. По моему мнению, мы должны все силы бросить на оборону Верды. Тогда, если противник атакует ее, мы потеряем лишь три боевых дрокера.

– А если фиолетовые сунутся на Калимну? – нетерпеливо вмешался Луд. – Тогда не сдобровать шести нашим дрокерам.

Он самодовольно забросил в себя очередную порцию молибдена и продолжал:

– Калимна – вот наша главная опора. Все силы на ее защиту! Тогда атака на Калимну принесет фиолетовым в добычу всего один дрокер.

– А Верда? – подавился возмущением Мотс. – Мы потеряем там пять дрокеров!

– Потише, генералы, – бесцеремонно прервал их Дор. – Попробуем разобраться. Наша задача – потерять как можно меньше дрокеров, – Дор еще раз посмотрел на таблицу с вариантами, – но все зависит от того, какой план изберет противник. А что говорит разведка?

Нахит неохотно ответил:

– У нас пока еще нет точных данных. Но, надо думать, противник тоже колеблется. Иначе говоря, мы можем считать, что вероятность принятия противником каждого плана равна $1/2$. Не беспокойтесь, господа, я так же, как и вы, не знаком с теорией вероятностей. Из всей мудреной науки я знаю лишь, что вероятность $1/2$ означает один шанс из двух, да еще правило для исчисления ожидаемых потерь. К примеру, если вероятность нападения на Калимну составляет $1/2$, а наши потери в результате такого нападения будут равны шести дрокерам, то ожидаемые потери в Калимне составят $6 \times \frac{1}{2} = 3$. А если бы, скажем, вероятность нападения составляла $1/3$, то это означало бы ожидаемые потери $6 \times \frac{1}{3} = 2$. Этого достаточно, чтобы подсчитать ожидаемые потери в каждом из двух наших возможных планов:

Стратегия	Ожидаемые потери дрокеров		
	в Калимне	в Верде	Итого
Защита Верды	$6 \times \frac{1}{2} = 3$	$3 \times \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$
Защиты Калимны	$1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$5 \times \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$	3

Вы видите, что при защите Калимны мы потеряем на целых полтора дрокера меньше.

– Недурная осведомленность для начальника разведки, – съязвил Луд, снова закладывая в себя молибден.

– А почему вы решили, что вероятности нападения на Верду

и Калимну равны? Мне так не кажется. По-моему, фиолетовые скорее всего ринутся на Верду. Ведь они уже один раз ее брали. И если они атакуют Калимну в одном случае из четырех, т.е. с вероятностью $1/4$, а Верду – с вероятностью $3/4$, то ваши расчеты приведут совсем к другому выводу:

Стратегия	Ожидаемые потери дрокеров		
	в Калимне	в Верде	Итого
Защита Верды	$6 \times \frac{1}{4} = 1\frac{1}{2}$	$3 \times \frac{3}{4} = 2\frac{1}{4}$	$3\frac{3}{4}$
Защиты Калимны	$1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$	$5 \times \frac{3}{4} = 3\frac{3}{4}$	4

Разве не ясно, что нам выгоднее защищать Верду?

– Лично мне не ясно, – возразил Дор. – Эти расчеты были бы оправданы, если бы можно было как-то обосновать оценки шансов нападения на Верду и Калимну. Но пока это одни догадки. А строить рассуждения на догадках – это вредная привычка, вроде окисления молибдена. И нам пора от нее избавляться.

Генералы скучно переглянулись – Дор один среди них пренебрегал молибденом.

– Нельзя ли принять правильный план, не делая заранее предположений о шансах принятия противником того или иного плана? Что думаете вы, Рол, как ведущий военный теоретик?

– Я читал в «Межпланетном вестнике», что где-то на далекой планете построили теорию, позволяющую это сделать. Давайте предположим, что нам нужно использовать не один план, а оба, с неизвестными пока вероятностями p_1 и p_2 . Если, скажем, $p_1 = 0,2$, а $p_2 = 0,8$, то в двух случаях из десяти нужно защищать Верду, а в восьми – Калимну. Иначе говоря, давайте ответим на неопределенность случайностью.

– Мы не можем ставить судьбы сиреневых в зависимость от случайности, – просипел Мотс. – Ведь речь идет...кхе-кхе... не о результате матча в брастул, а о судьбе государства, и...

– Продолжайте, Рол. Мне кажется, в ваших словах есть нечто интересное, – вмешался рассудительный Дор.

– Теперь нам нужно найти эти вероятности p_1 и p_2 . Разуме-

ется, сумма их должна быть равна единице – ведь какое-то решение нам так или иначе придется принять:

$$p_1 + p_2 = 1. \quad (1)$$

– Интересно, как это вам удастся найти два неизвестных из одного уравнения, – не успокаивался Луд.

– Давайте теперь потребуем, чтобы в любом случае среднее число потерянных дрокеров не превысило величины v , пока еще неизвестной, – продолжал Рол.

– Третье неизвестное! – с возмущением заметил Луд, но Рол увлеченно продолжал, не обращая внимания ни на Луда, ни на других генералов.

– Допустим, что фиолетовые нападут на Калимну. Если бы мы приняли план защиты Верды, то потеряли бы 6 дрокеров, но поскольку мы защищаем Верду лишь с вероятностью p_1 , то и потеряем на этом $6p_1$ дрокеров. С вероятностью p_2 мы защищаем Калимну, и это приведет к потере $1 \times p_2 = p_2$ дрокеров. Итого в результате нападения противника на Калимну мы потеряем $6p_1 + p_2$ дрокеров. Чтобы потери не превысили величины v , должно выполняться неравенство

$$6p_1 + p_2 \leq v. \quad (2)$$

– Но противник может напасть и на Верду, – напомнил Нахит.

– Да, и это дает нам еще такое неравенство:

$$3p_1 + 5p_2 \leq v. \quad (3)$$

Мне, как, надеюсь, и вам всем, хотелось бы, чтобы величина v была поменьше. Однако она все же будет положительной: $v > 0$, – поскольку какое-то количество дрокеров нам придется потерять. Обозначим $x_1 = p_1/v$, $x_2 = p_2/v$, $L = 1/v$. Тогда неравенства (2) и (3), условия неотрицательности p_1 и p_2 и уравнение (1) запишутся так:

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 \leq 1, \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \\ L(x_1, x_2) = x_1 + x_2. \end{cases} \quad (4)$$

Нас интересует наименьшее значение v , поэтому L должно быть наибольшим. Задача отыскания из системы (4) x_1 и x_2 , при которых функция $L(x_1, x_2)$ принимает наибольшее воз-

можное значение, называется жителями той далекой планеты *задачей линейного программирования*. При двух неизвестных x_1 и x_2 эту задачу можно решать графически. Каждое из неравенств системы (4) задает на координатной плоскости $x_1 O x_2$ полуплоскость, пересечение этих полуплоскостей образует четырехугольник (см. рис.1), а уравнение $L = x_1 + x_2$ задает прямую, пересекающую оси координат в точках $x_1 = L$ и $x_2 = L$. При разных L получаются параллельные пря-

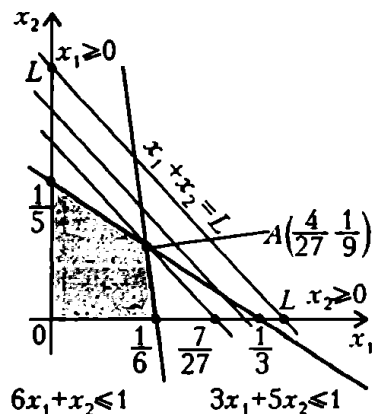


Рис. 1

мые. Наибольшее L , при котором прямая $x_1 + x_2 = L$ пересекает четырехугольник (т.е. система (4) имеет решение), соответствует точке $A(4/27; 1/9)$ и дает $L = 4/27 + 1/9 = 7/27$, поэтому $v = 27/7 = 3\frac{6}{7}$, $p_1 = 4/7$, $p_2 = 3/7$. Таким образом, в четырех случаях из семи мы должны защищать Верду, а в трех – Калимну. И наши потери составят в среднем менее четырех дрокеров.

– Но заметьте, – вмешался Мотс из-за облачка паров молибдена, – раньше мы ожидали меньших потерь – только 3 или $3\frac{3}{4}$ дрокера.

– Неудивительно, – возразил Нахит. – Ведь нам пришлось что-то заплатить за недостающую информацию.

Но тут не выдержал Луд.

– По-моему, мы и так слишком много тратим на разведывательную службу, не получая взамен даже жалких крох информации о противнике.

Атмосфера снова начала накаляться, но вмешательство Дора не дало разрастись взаимным упрекам.

– Скажите, Рол, а как в этих условиях будет действовать противник? Если ли у него оптимальная стратегия?

– Да, есть. Противник не знает наших планов, но ему известны последствия нападения на Верду и Калимну – его разведка обычно не подводит; поэтому он со своей стороны должен стараться нанести нам наибольший урон. Если обозначить наш урон через w , а вероятности нападения противника на Калимну и Верду через q_1 и q_2 , то $q_1 + q_2 = 1$, $6q_1 + 3q_2 \geq w$, $q_1 + 5q_2 \geq w$, $y_1 = q_1/w$, $y_2 = q_2/w$, $M = 1/w$, и противник

придет к следующей задаче линейного программирования:

$$\begin{cases} 6y_1 + 3y_2 \geq 1, \\ y_1 + 5y_2 \geq 1, \\ y_1 \geq 0, \\ y_2 \geq 0, \\ M(y_1, y_2) = y_1 + y_2, \end{cases}$$

причем надо искать наименьшее значение M . Когда противнику удастся решить эту задачу линейного программирования, он получит: $y_1 = 2/27$, $y_2 = 5/27$, $M = 7/27$, откуда $q_1 = 2/7$, $q_2 = 5/7$, $w = 3\frac{6}{7}$ (рис.2). Выходит, противник для достижения

наибольшего урона нашим войскам в двух случаях из семи должен нападать на Верду, а в пяти – на Калимну. И его добыча

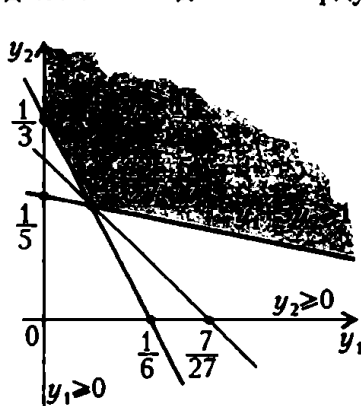


Рис. 2

будет равна тем же $3\frac{6}{7}$ дрокера.

Разумеется, он должен нападать так, чтобы мы не знали определенно, какое нападение предстоит.

– Учитывая работу нашей разведки, – не удержался Луд, – это нетрудно.

– Скажите, Рол, – поинтересовался Дор, – а что будет, если противник не станет следовать своей наилучшей стратегии?

– В «Межпланетном вестнике»

пишут, что всякое отклонение от нее может привести лишь к уменьшению успехов.

Рол закончил свою речь жестом победителя, но у Дора она не имела успеха.

– Я вполне согласился бы с вами, Рол, если бы нам предстояло несколько столкновений с фиолетовыми. Но нас ждет лишь одна битва. Какое решение нам принять?

– Независимо от числа битв мы должны бросать своеобразный жребий. Если бы оптимальная стратегия имела вид $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/2$, то достаточно было бы бросить монетку, загадывая на куку и кору. Стратегию $p_1 = 4/7$, $p_2 = 3/7$ реализовать несколько труднее. Но можно. Например, так: $4/7$ – это примерно

34/60, а 3/7 – это 26/60. Можно взглянуть на часы, и если секундная стрелка будет между 0 и 34 секундами, принять решение оборонять Верду, а если между 34 и 60 – Калимну. Я считаю, что так и нужно поступать, даже если битва всего одна.

– Я не согласен! – возразил Мотс, – и по многим причинам. Так стоило бы действовать, если бы нам противостоял разумный противник, равный нам по интеллекту – например, бордовые. Но фиолетовые принадлежат к низшей категории...кхе-кхе... их можно рассматривать просто как силы природы. Подумать только! Вместо молибдена эти варвары употребляют висмут! Они никогда не додумаются...

Новый приступ кашля сломил Мотса, и он уже не мог продолжать. Срочно вызванный штабной врач занялся пациентом, и совещание пришлось на время прервать.

Первое возвращение на Землю

Участники военного конфликта на далекой планете использовали математическую теорию, хорошо известную у нас на Земле, – *теорию игр*. Ее применяют в тех случаях, когда нет информации о замыслах противника. Первоначально эта теория развивалась применительно к азартным играм, от чего и получила свое название. Но затем ее приложения стали весьма многообразными – от экономики до военного дела. Следует отметить, что исходные положения теории игр не бесспорны. И применима она, строго говоря, лишь тогда, когда игра повторяется достаточно много раз. Однако находятся сторонники ее применения и к однократным решениям (в их числе – генерал Рол).

В числе многих интересных проблем теории игр – проблема *смешанных стратегий*. Нередко информация, имеющаяся в распоряжении того, кто принимает решение, недостаточна. В этих условиях невозможно указать какую-то одну безусловную стратегию, и приходится прибегать к использованию смешанной стратегии – с некоторыми вероятностями применять несколько вариантов, как предложил впервые французский математик Эмиль Борель (1871–1956). Впоследствии для отыскания оптимальных смешанных стратегий стали применять линейное программирование.

Смешанные стратегии нуждаются в *датчике случайных чисел* (простейшие варианты таких датчиков – монета, часы с секундной стрелкой; разумеется, существуют и более совершенные датчики случайных чисел, реализуемые на ЭВМ). Если смешанная стратегия не будет доставляться датчиком случайных чисел, а будет назначаться, есть опасность, что противник отгадает, какой

вариант его ждет, и получит возможность действовать более эффективно. Но против случайной смешанной стратегии у противника только одно средство – использование своей оптимальной смешанной стратегии, также определяемой случайным образом.

Сиреневые не употребляли еще нескольких важных терминов теории игр, с которыми полезно познакомиться читателю. Так, самая первая таблица, показывающая возможные потери сиреневых, называется *матрицей игры*. А величина v – средний урон, который понесут сиреневые в случае использования ими оптимальной смешанной стратегии, – называется *ценой игры*.

Способ рассуждений, который предложил генерал Нахит, – не зная, что сделает противник, считать все варианты равновероятными – принадлежит английскому математику XVIII века Т.Бейесу.

Как мы уже отмечали, в теории игр нет единого, обоснованного рецепта действий, что дает простор для творчества. Именно это обстоятельство и определило дальнейший ход совещания при штабе сиреневых после вынужденного перерыва, вызванного скверной привычкой генерала Мотса.

Калимна или Верда?

– Ну как, скоро? – торопил Дор врача.

Врач откинул спинной кожух Мотса и показал паяльником на пыльное хитросплетение тронутых ржавчиной транзисторов.

– Боюсь, что...

– Составьте дефектную ведомость, – коротко приказал Дор, – и дайте мне на утверждение.

Генералы понимающие мигнули – они знали закон сиреневых: после составления дефектной ведомости больного разбирали на запчасти, если стоимость ремонта превышала стоимость нового индивидуума. А здесь, по-видимому, дело шло к этому.

Дор невозмутимо продолжал.

– Я должен согласиться с генералом Мотсом. Рекомендуемая стратегия слишком рациональна. Между тем даже в нашем обществе, которое по своей морали и интеллекту куда выше общества фиолетовых, не все действуют разумно. Иначе откуда бы развилось это губительное пристрастие к молибдену, которое вдвое сокращает жизнь?

– Да будет позволено мне вставить слово, – снова вмешался Нахит. – К чему мы, собственно говоря, стремимся? Мы стремимся потерять как можно меньше дрокеров. Мы могли бы, разумеется, принять превосходное решение, если бы знали в точности, на что решится противник. Но узнать это мы не можем,

несмотря на то, что наша разведка прикладывает героические усилия.

– Вот именно, – вырвалось у Луда.

– Давайте же действовать так, чтобы добиться наименьшего ущерба от возможных ошибок в выборе стратегии. Взглянем еще раз на таблицу. Если бы противник атаковал Калимну и мы защищали Калимну, то потеряли бы всего один дрокер. Это было бы верное решение. А если бы мы стали защищать Верду, то потеряли бы лишних $6 - 1 = 5$ дрокеров. Аналогично, при обстреле Верды, защищая Калимну, мы потеряем лишних $5 - 3 = 2$ дрoкера. Это позволяет составить следующую таблицу лишних потерь от неправильных решений:

Стратегия фиолетовых Стратегия сиреневых	Атака на Калимну	Обстрел Верды
Защита Верды	5	0
Защита Калимны	0	2

А теперь остается составить задачу линейного программирования: $5p_1 \leq v$, $2p_2 \leq v$, $p_1 + p_2 = 1$, $z_1 = p_1/v$, $z_2 = p_2/v$, $K = 1/v$, откуда получаем систему

$$\begin{cases} 5z_1 \leq 1, \\ 2z_2 \leq 1, \\ z_1 \geq 0, \\ z_2 \geq 0, \\ K(z_1, z_2) = z_1 + z_2. \end{cases}$$

Наименьшее v , т.е. наибольшее K , будет при $z_1 = 1/5$, $z_2 = 1/2$, откуда $K = 7/10$, $v = 10/7$, $p_1 = 2/7$, $p_2 = 5/7$. Смотрите-ка, было $p_1 = 4/7$, $p_2 = 3/7$, т.е. $p_1 > p_2$, а теперь наоборот: $p_2 > p_1$. По этому критерию защита Верды куда менее привлекательна. Вы были правы, генерал Луд.

Тем временем Дор мельком взглянул на дефектную ведомость. Так и есть, больше половины узлов требует замены, в том числе дорогая система питания. Дешевле собрать на конвейере нового генерала. И он размашисто расписался.

– Так какой жребий вы предлагали, Рол? – спросил Дор, которому подход Нахита понравился больше, чем поход Рола, хотя Нахит решил совсем другую задачу: минимизировать не потери, а последствия ошибки.

– Да, вспомнил: часы. Прикинем: $2/7$ – это $17/60$. Всего семнадцать секунд решают судьбу планеты! – Дор поднял к фотореле шестое щупальце с часами. Секундная стрелка была вблизи 47 секунд.

– Подготовиться к защите Калимны! – приказал он. – Совещание объявляю закрытым! Позор фиолетовым!

– Позор фиолетовым! – эхом отозвалось совещание, и все стали быстро разъезжаться, унося с собой запах паров молибдена. Больше других торопился штабной врач: ему еще нужно было передать шифровку в штаб фиолетовых.

Второе возвращение на Землю

Да, такой исход трудно было предвидеть. Вся стратегия сиреневых строилась на отсутствии информации у обоих противников, в то время как фиолетовые теперь будут принимать решение при полной информации. В этом, конечно, нет вины американского математика Л.Сэвиджа. Годом которого воспользовались сиреневые, он ничем не смог бы им помочь, если бы даже захотел: Сэвидж – специалист по статистике, а не по контрразведке. Но в любом случае выбор наилучшей стратегии – это очень тяжелая задача, допускающая неоднозначные решения.

Наилучшая стратегия не всегда существует. Например, ее нет в игре в «Спортлото»: вы можете как угодно назначать номера, и при этом вероятность угадывания какого-то количества номеров не изменится. Правда, нужно отметить, что существует возможность выигрыша: для этого нужно использовать такую стратегию, против которой большинство участвующих в игре почему-либо предубеждено – ведь выигрыш делится между угадавшими. Бывают явные предубеждения (например, некоторые уверены, что никогда не выиграют первые шесть номеров подряд), а бывают и неявные (числа, кратные пяти, выбираются чаще других).

В развитой сейчас теории игр рассмотрено уже много задач. В некоторых из них выбор приходится делать не из конечного, а из бесконечного числа стратегий. Не все поставленные задачи решены – не решена, например, задача «Принцесса и Чудовище», сформулированная американским ученым Р.Айзексом.

В абсолютно темном помещении заключены Принцесса, которая может двигаться с любой скоростью и в любом направлении, и Чудовище, скорость которого ограничена. Чу-

дравище захватывает Принцессу, если расстояние между ними становится меньше заданного. Какой должна быть стратегия Принцессы, чтобы она могла максимально оттянуть поимку (вероятно, до прихода принца)?

Ясно, что если Принцесса начинает метаться, сполна используя свою скорость, она сама наткнется на Чудовище, а если она будет стоять, то планомерный обход Чудовищем всего помещения принесет ему успех в среднем за время, равное половине времени обхода). Айзекс полагает, что оптимальная стратегия Принцессы должна быть смешанной, но какой – никто не знает. По-видимому, Принцессе следует менять случайным образом скорость и направление.

Особенно трудно выбрать наилучшую стратегию, когда игра ведется не против разумного противника, который стремится нанести наибольший ущерб, а против природы. Стратегию природы нельзя предвидеть по принципу наибольшего ущерба – природа беззлобна. Чтобы проникнуть в ее стратегию, нужно знать физические законы, а этим занимается не теория игр, а совсем другие теории.

Упражнения

1. На этот раз первенство школы по футболу решили проводить без замен игроков. И перед 7 «А» встала проблема: ставить или не ставить на матч с 7 «Б» рослого, но неповоротливого Сеню? Если противники догадаются поставить в защиту долговязого Колю, Сеня будет нейтрализован и не забьет ни одного гола. Но если противники поставят не Колю, а Алика, то Сеня забьет верных три гола с навесов на штрафную площадку. Можно поставить вместо Сени юркого Васю – тот еще ни разу не уходил с поля без гола, а если его будет опекать не Алик, а Коля, то не миновать и двух голов. Кого же ставить – Сеню или Васю, если их возможности хорошо известны противникам?

2. Решите предыдущую задачу, если выбор приходится делать между Сеней и Петей, который всегда забивает ровно один гол.

3. Это ж надо! Остается час до начала занятий, а Петя из-за футбола еще не приготовил домашнего задания по алгебре, русскому и физике. Но ведь он обещал подтянуться по алгебре и физике на классном собрании! Катастрофическая ситуация, если учесть, что сегодня наверняка будет контрольная или по алгебре, или по физике (ровно одна – как учителя договорятся, а учителя к нему прядираются). За час можно подготовить только один предмет. Если выучить алгебру и по ней будет контрольная, то ее удастся написать на четверку, но если при этом контрольная будет по физике, то двойка обеспечена. А если выучить физику, то контрольная по ней принесет тройку, зато контрольная по алгебре принесет два балла. Наконец, если выучить русский, то двойки предостоят по любой из контрольных. За что же хвататься?

Б. Вертгейм

Можно ли изучать математику играя? Оказывается, можно, так как в математике есть много задач, описывающих «игровые ситуации».

Мы займемся играми, связанными с поиском наибольших и наименьших значений функций. Искусство такого поиска важно во многих задачах экономики, военного дела, биологии, спорта,...

Решающие десять одиннадцатиметровых

Мы на футбольном поле. Игрок *A* и вратарь *B* готовятся к серии из 10 одиннадцатиметровых ударов. Игрок бьет вправо или влево; вратарь, пытаясь угадать направление удара, готовится к прыжку влево или вправо от себя. Их мастерство отражено в таблице ¹:

<i>A</i> \ <i>B</i>	1	2
	7	10
1	7	10
2	9	6

если игрок бьет вправо (это его стратегия №1), а вратарь готовится к прыжку влево от себя (это стратегия №1 для *B*), то в среднем в воротах будет 7 мячей из 10; если же *B* готовился к прыжку вправо, то влетают все 10 мячей и т. д.

Оба игрока будут чередовать свой выбор случайным образом. Если каждый из них выбирает каждую из своих стратегий примерно в половине случаев (как говорят, с вероятностью

Опубликовано в «Кванте» №11 за 1981 г.

¹ В теории игр и в экономике подобные таблицы называются *платежными матрицами*.

1/2), то в среднем будет забито $(7 + 10 + 9 + 6) : 4 = 8$ мячей.

Если же A будет применять свою первую стратегию с вероятностью 0,6 (в 60% случаев), а вторую – с вероятностью 0,4 (в 40% случаев), вратарь же – свою первую стратегию с вероятностью 0,8, а вторую – с вероятностью 0,2, то в среднем будет забито $(7 \cdot 0,6 + 9 \cdot 0,4) \cdot 0,8 + (10 \cdot 0,6 + 6 \cdot 0,4) \cdot 0,2 = 7,92$ мяча, что меньше 8. Конечно, говорить о том, что в данной конкретной серии будет забито 7,92 мяча, бессмысленно. Здесь имеется в виду, что при многократном повторении серий, удовлетворяющих поставленным условиям, среднее количество забитых мячей (отношение общего количества мячей к числу серий) будет близко к числу 7,92.

Пусть вообще A выбирает свои первую и вторую стратегии с вероятностями x и $1 - x$ ($0 \leq x \leq 1$), а B – с вероятностями y и $1 - y$ ($0 \leq y \leq 1$). В этом случае говорят, что числа x и y определяют *смешанные стратегии игроков*. Тогда среднее число забитых мячей равно

$$m = (7x + 9(1 - x))y + (10 + 6(1 - x))(1 - y) = -6xy + 4x + 3y + 6.$$

(*)

Естественно возникает вопрос: каковы наилучшие значения x для A , y – для B ? Наилучшее значение x^* для A , разумеется, должно гарантировать минимальное число нереализованных пенальти (в среднем), независимо от тактики вратаря. Наилучшее же значение y^* для B должно гарантировать минимальное количество забитых мячей (в среднем), независимо от стратегии игрока, бьющего пенальти.

Оказывается (вы в этом убедитесь, решив упражнение 1), $x^* = 1/2$, $y^* = 2/3$; в этом случае будет забито (в среднем) $m^* = 8$ мячей. Легко проверить (обязательно сделайте это!), что если хотя бы один из играющих будет придерживаться указанной «наилучшей» стратегии, то независимо от стратегии другого будет забито именно $m^* = 8$ мячей (в среднем). Если же один из игроков отклонится от указанной стратегии, то он уже не может ничего гарантировать – результат будет зависеть от действий противника.

Так, если вратарь будет одинаково часто прыгать вправо и влево (т.е. $y = 1/2$), а игрок все время бить в правый угол ($x = 0$), то будет забито в среднем меньше мячей ($m = 7,5$). Но если игрок A похитрее, он будет всегда бить в левый угол ($x = 1$) и тогда станет забивать чаще ($m = 8,5$).

А теперь отдохнем от футбола, от вероятностей и займемся «просто» функциями, причем без ограничений на x и y – это облегчит первые шаги.

Выигрыш, проигрыш, ничья

Пусть двое игроков играют в такую игру: A выбирает действительное число x , B – число y , причем каждый делает свой выбор, не зная выбора противника. Оба числа сообщаются судье, после чего по заранее известному игрокам правилу подсчитывается выигрыш первого $v = f(x, y)$, равный проигрышу второго; точнее говоря, при $v > 0$ A выигрывает у B величину v , при $v < 0$ A проигрывает B величину $|v|$; если же $v = 0$, то в игре – ничья; символ $f(x, y)$ означает, что v – это заданная функция двух переменных (x, y) .

Пусть, например, правило подсчета выигрыша в игре таково:

$$v = y^2 - x^2. \quad (1)$$

Попробуйте сыграть несколько раз по правилу (1). После нескольких «партий» игроки заметят, что каждому из них лучше выбирать нулевые значения: при $x = y = 0$ получается ничья, причем ни одному из игроков невыгодно отклоняться от этого выбора, даже зная выбор противника.

Действительно, поскольку при $x = 0$ имеем $v = y^2$, наилучшей ответ игрока B – это выбор $y = 0$. Аналогично, при $y = 0$ имеем $v = -x^2$ и наилучший ход A – это $x = 0$.

Теперь уже ясно, что играть с *платежной функцией* $v = y^2 - x^2$ неинтересно: ничья обеспечена как тому, так и другому игроку. Труднее и интереснее играть со следующей платежной функцией:

$$v = y^2 - x^2 + 8x - 10y + 9. \quad (2)$$

Существуют ли в этом случае такие числа x и y , которые можно рекомендовать игрокам и от которых им будет «накладно» отклоняться?

Простой ключ к игре (2) дает разложение

$$v = (9 - x - y)(x - y + 1).$$

Составив систему уравнений

$$\begin{cases} 9 - x - y = 0, \\ x - y + 1 = 0, \end{cases}$$

имеющую единственное решение $x^* = 4$, $y^* = 5$, заключаем, что игра (2) имеет ничейный исход $v^* = v(x^*, y^*) = 0$ при $x = x^* = 4$, $y = y^* = 5$.

Геометрическое объяснение здесь таково (рис. 1): пара чисел $(x^*; y^*) \in \mathbb{R}^2$ определяется точкой пересечения прямых, соответствующих уравнениям системы; если точка с координатами $(x; y)$ лежит на одной из них, то $v = 0$; для точек, лежащих внутри углов, образованных нашими прямыми, величина v имеет знак, указанный на рисунке. Этот рисунок дополняют следующие вычисления и рассуждения: если $x = 4$, то $v = (5 - y)^2 \geq 0$; $v_{\min} = 0$ при $y = 5$ (в точках вертикали $x = 4$ всегда $v \geq 0$); если $y = 5$, то $v = -(x - 4)^2 \leq 0$; $v_{\max} = 0$ при $x = 4$ (вдоль горизонтали $y = 5$ имеем $v \leq 0$).

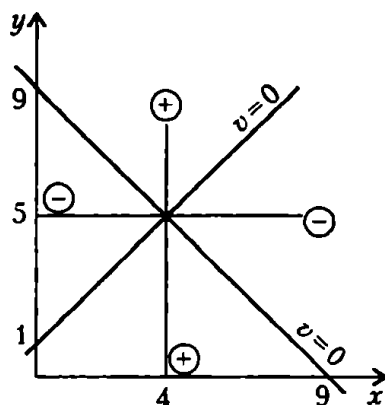


Рис. 1

Таким образом, если A выберет $x = 4$, то игрок B при любом выборе, кроме $y = 5$, *проигрывает*. Аналогично, если A выбирает $x \neq 4$, игрок B *выигрывает*, взяв $y = 5$.

Итак, у первого игрока есть ход, сделав который он заведомо не проиграет. Такой же ход есть и у второго игрока. Поэтому в этой игре тот, кто рискнет сыграть не «по теории», тот и проигрывает (если, конечно, и его противник не идет на риск отказа от теории).

Приведем для примера результаты пяти партий нашей игры (в каждой тройке первое число — это x , второе — y , третье — v): $(0, 0, 9)$, $(0, 7, -12)$, $(4, 7, 4)$, $(4, 5, 0)$, $(5, 5, -1)$. Изучение этих партий подсказывает еще один путь решения (к сожалению, не всегда пригодный). Попробуем рассуждать за первого игрока: «Если B выберет $y = y_0$, то тогда получается квадратный трехчлен

$$v(x, y_0) = (9 - y_0 - x)(x - y_0 + 1)$$

относительно x , который я должен сделать как можно большим, выбрав подходящее x ; но у этого трехчлена максимум при $x = 4$, поэтому я хожу $x = 4$!». Рассуждая аналогично, второй игрок обеспечит себе минимальный проигрыш при $y = 5$ (при любом ходе $x = x_0$ первого).

Седловая точка и решение игры

Мы видели, что в игре с функцией (2) каждый игрок может гарантировать себя от проигрыша, так как удалось найти такую пару чисел $(4; 5)$, что $f(4, 5) = 0$ и для всех остальных x и y

значения функции f удовлетворяют неравенствам

$$f(x, 5) \leq f(4, 5) \leq f(4, y).$$

Отсюда видно, что первый игрок, выбирая $x = 4$, во всяком случае, не проигрывает (это вытекает из последнего неравенства), как не проигрывает и второй, выбирая $y = 5$.

Дадим общие определения.

Определение седловой точки. Пусть задана функция f , определенная на некотором множестве G точек плоскости. Точка $(x^*, y^*) \in G$ называется *седловой точкой* функции f или *точкой равновесия*, если при $(x, y^*) \in G$, $(x^*, y) \in G$

$$f(x, y^*) \leq f(x^*, y^*) \leq f(x^*, y).$$

Из этих неравенств следует, что

$$\max_x f(x, y^*) = f(x^*, y^*) = \min_y f(x^*, y)$$

(в левой части берется максимум по переменной x при фиксированном $y = y^*$, в правой части – минимум по y при фиксированном $x = x^*$).

В теории игр седловую точку (x^*, y^*) часто называют *решением* игры (с *платежной функцией* $v = f(x, y)$), число $v^* = f(x^*, y^*)$ называют *ценой* игры, а числа x^*, y^* – *оптимальными стратегиями* первого и второго игроков соответственно.

Туристы и альпинисты

Туристы, желая пройти из долины D_1 в долину D_2 , идут через перевал (седловину) – при этом максимальная высота на пути из D_1 в D_2 (рис.2) оказывается минимальной по сравнению со всеми близкими маршрутами, не проходящими через седло. Альпинисты, желая совершить траверс от вершины V_1 к вершине V_2 , проходят то же седло по другой причине – чтобы не «терять высоту», т.е. чтобы была максимально возможной минимальная высота на пути от V_1 к V_2 .

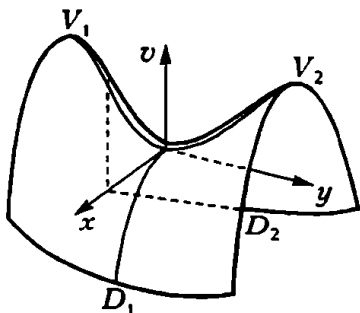


Рис. 2

Рисунок 1 похож на карту, где высота перевала принята за нуль, а x и y – это долгота и широта. Будем рассматривать прямые, параллельные осям, как возможные пути для туристов и альпинистов. Подобно

маршрутам в горах, основные прямые рисунка 1 ($y = 5$ и $x = 4$) выделены тем, что

$$f(x^*, y^*) = \min_y \max_x f(x, y) = \max_x \min_y f(x, y),$$

и это очень полезно при анализе игр. Здесь $\max_x f(x, y)$ – наибольшее значение f при заданном y и переменном x , т.е. это наихудший исход для B при выбранном значении y ; очевидно, это величина минимальна при $y = 5$. Истолкуйте аналогично выбор $x = 4$ для игрока A .

Рассмотрим теперь игру с платежной функцией $v = x^2 - y^2$, у которой нет седловой точки (убедитесь в этом). Анализ игры с подобной функцией сильно осложняется. В данном примере противники будут заинтересованы выбирать самые большие числа, какие им доступны. Если ввести ограничения на переменные x и y вида $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, что нередко встречается на практике, появятся 4 седловые точки: $x^* = \pm a$, $y^* = \pm b$ ($v^* = a^2 - b^2$).

Однако при такого рода ограничениях седловая точка может и не появиться (см. упражнение 3).

Решение игр с квадратичной платежной функцией

Итог нашим теоретическим рассмотрениям подводит следующая

Теорема. Пусть дана игра с платежной функцией

$$v = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2px + 2qy + r.$$

Эта функция имеет седловую точку, а игра – решение в следующих семи случаях и только в них:

- 1) $a < 0$, $c > 0$;
- 2) $a < 0$, $c = 0 \neq b$;
- 3) $a < 0$, $c = b = q = 0$;
- 4) $a = 0 \neq b$, $c > 0$;
- 5) $a = b = p = 0$, $c > 0$;
- 6) $a = c = 0$, $b \neq 0$;
- 7) $a = b = c = p = q = 0$.

Седловая точка является решением системы уравнений

$$\begin{cases} ax + by + p = 0, \\ bx + cy + q = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Это решение (x^*, y^*) во всех этих случаях, кроме 3), 5), 7), единственно.

Мы оставляем доказательство теоремы, сводящееся к перебору случаев, читателю: разбор предыдущих конкретных примеров поможет ему.

Упражнения

1. а) Рассмотрите игру с платежной функцией $m = 6 + 4x + 3y(1 - 2x)$ и найдите значение x , при котором m не зависит от y , а также значение y , при котором m не зависит от x . Дает ли эта пара значений решение игры?

б) Решите игру, заменив число 9 на 8 в платежной матрице одиннадцатиметровых ударов.

2. Найдите решения и цены игр со следующими платежными функциями:

а) $v = -x^2 + 6xy + y^2 - 10x + 15$;

б) $v = (x + y - a)(y - x - b)$;

в) $v = 10 \ln x - x^2 + 2xy + y^2 + 10x - 8y - 40, x > 0$;

г) $v = k(\sqrt{x}, -\sqrt{y}) + \sqrt{a-x} - \sqrt{b-y}$;

д) $v = k(-x^2 + 2pxy + y^2) - x_0^2 - 2px_0y + y_0^2$, где $x_0 = a - x, y_0 = b - x$;

е) $v = -x^2 - xy + 6y^2 + \frac{y^4}{8}$.

3. Есть ли точки равновесия в следующих играх «с ограничениями»:

а) $v = x^2 + y^2$; б) $v = (x - y)^2$; в) $v = x^2 + xy + y^2$, причем во всех трех случаях $|x| \leq a, |y| \leq b$.

4. Как изменяются утверждения теоремы при дополнительном условии $x \geq a$?

5. Рассмотрите следующие игры с платежной матрицей 2×2 вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.² Игрок A выбирает строки, B столбцы, а решение надо найти для смешанных стратегий (x, y) и функции типа (1) при $0 \leq x, y \leq 1$ в следующих случаях:

а) «Прятки» или «поиск»: $a = d = -1, b = c = 1$. Игрок A прячется в одном из двух мест, а B ищет его там же. Тот, кто достигает цели, получает, а другой — теряет очко (монету).

б) «Защита и нападение»: $a = d = c + 1, b > 1$, где $c > 1$ задано, например, $c = 3$. Отряд во главе с A отвечает за 2 склада с горючим (во втором его в c раз больше, чем в первом). Сил у A хватит лишь для

² Число a — это выигрыш игрока A (проигрыш B), если оба применяют свои первые стратегии, и т.д. (сравните с таблицей для игры с вратарем); здесь также игры повторяются много раз.

защиты одного склада. Отряд B может атаковать лишь один из этих складов. Если их выборы совпадут, то все остается целым, если нет – незащищенный склад горит. Найдите решение и цену игры и истолкуйте результаты.

в) «Случай на пляже»: $a = d = -\frac{b+c}{2}$, $b > c > 0$. Например, $b = 30$, $c = 10$. К туристу A подходит незнакомец B и предлагает такую игру: оба разом показывают одну из сторон монеты. Если у A – «орел», у B – «решка», то A выигрывает 30 монет; если у A – «решка», у B – «орел», выигрыш A равен 10; если же выборы совпадут, то «для справедливости», как говорит B , турист заплатит ему 20 монет. Действительно ли эта игра справедливая и честная и в среднем никто не будет в проигрыше?

г) $a = 7$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 2$.

6. Для игр с платежной матрицей 2×2 докажите существование седловой точки у платежной функции вида (1).

Указание. Система (3) применима не всегда из-за ограничений на x и y , поэтому удобнее построить графики прямых линий $v = \varphi_1(x) = ax + c(1-x)$, $v = \varphi_2(x) = bx + d(1-x)$ и найти x , исследуя задачу на «максимин»: определить

$$\max_{x \in [0,1]} \min_{i=1,2} \{\psi_i(x)\}.$$

Примените этот способ в играх упражнения 5.

7 (задача для юных программистов). Для проведения серии из N игр с заданной функцией составьте программу на любом алгоритмическом языке ($N = 5$ или 10); в очередной партии судья вводит в ЭВМ выбранные значения x и y , и, после подсчета, на печать выводится выигрыш игрока в этой партии и накопленный им выигрыш за все партии игры с начала данной серии.

8. Докажите, что если цена игры с квадратичной функцией существует, то она единственна, хотя седловых точек может быть более одной.

9. Число – элемент матрицы – на пересечении i -й строки и j -го столбца часто обозначают a_{ij} – это краткая запись для $a(i, j)$, функции двух целочисленных аргументов. Элемент матрицы называется *седловым*, если он наименьший в своей строке и наибольший в столбце. Если такой элемент существует, то он равен цене игры, а номера его строки и столбца дают решение игры «в числовых стратегиях». Верно и обратное (докажите). У каких матриц из упражнений 1 и 5 есть седловые элементы?

И. Клумова

— А можете вы исчезать и появляться не так внезапно? — спросила Алиса. — А то у меня голова идет кругом.

— Хорошо, — сказал Кот и исчез — на этот раз очень медленно. Первым исчез кончик его хвоста, а последней — улыбка. Она долго парила в воздухе, когда все остальное уже пропало.

— Д-да, подумала Алиса. — Видела я котов без улыбок, но улыбку без кота! Такого я в жизни не встречала.

Льюис Кэрролл. «Алиса в стране чудес».

В октябрьском номере журнала «Scientific American» за 1970 год появилось описание увлекательнейшей игры — «Жизнь», придуманной современным американским математиком Джоном Хортоном Конвеем. О ней прекрасно рассказано в книге известного американского специалиста в области занимательной математики М.Гарднера. Игра эта очень не похожа на все остальные; лишь вычислительная машина дает возможность полностью ощутить, насколько эта игра необычна и красива.

В игру «Жизнь» можно играть одному, без партнера. Внимательному и уже очень опытному игроку достаточно иметь большой лист клетчатой бумаги и карандаш, чтобы делать ходы. Но начинающему игроку лучше запастись доской, разграфленной на клетки, и фишками двух цветов, например, черными и белыми (и лист, и доска считаются бесконечными).

Опубликовано в «Кванте» №9 за 1974 г.

Идея игры состоит в том, чтобы, начав с какого-нибудь простого расположения черных фишек («организмов») на доске, проследить, что будет происходить с этой исходной позицией («колонией») под действием «генетических законов» Конвея. «Генетические законы» — это и есть правила игры, они управляют рождением, гибелью и выживанием фишек на доске.

Заметим, что каждая клетка доски может находиться в одном из двух состояний — либо она пустая, либо же на ней стоит одна черная фишка, — и что у нее есть восемь соседних клеток (четыре имеют с ней общие стороны, и еще четыре — общие вершины). Будем называть колонию, получающуюся из предыдущей в результате одного хода, следующим поколением. Сформулируем теперь правила игры, т.е. определим, когда фишка «погибает», когда «рождается» и когда «выживает».

Фишка *выживает* (остается на доске на своем месте) и переходит в следующее поколение, если у нее есть две или три соседние фишки.

Фишка *погибает*, — снимается с доски, — если она имеет больше чем три или меньше чем два соседа (соответственно, из-за перенаселенности или же от одиночества).

Фишка *рождается* в некоторой пустой клетке, если в клетках, соседних с этой пустой клеткой, стоят ровно три фишки. Процессы «рождения» и «гибели» происходит одновременно.

Конвей рекомендует производить ходы следующим образом. Определить, какие фишки должны погибнуть, и положить на каждую из них еще по одной черной фишке. Затем определить, в каких клетках должны «родиться» фишки, — поместить в каждую такую клетку белую фишку. Внимательно проверить еще раз, все ли сделано правильно (допустить ошибку, особенно если играешь впервые, очень легко!), и затем убрать с доски все столбики из черных фишек, а белые фишки заменить черными — при этом получится следующее поколение исходной колонии (для этого нам и нужны фишки двух цветов).

Начав игру, вы обнаружите, что первоначальная колония может претерпевать самые неожиданные и порой очень красивые изменения. Иногда колония вымирает (с доски исчезают все фишки); произойти это может не сразу, а лишь после того как сменится очень много поколений. Но чаще всего исходные конфигурации лишь переходят в устойчивые, т.е. перестают изменяться вообще (их Конвей называется «любителями спокойной жизни»), либо «выходят на колебательный режим»,

т.е. испытывают цикл превращений с определенным периодом. Во всех этих случаях эволюция конфигурации считается законченной.

Происхождение «видов»

Посмотрим, что происходит с некоторыми простыми конфигурациями.

Одна или две фишки всегда погибают после первого же хода. Конфигурация из трех фишек (ее Конвей называет *триплетом*)

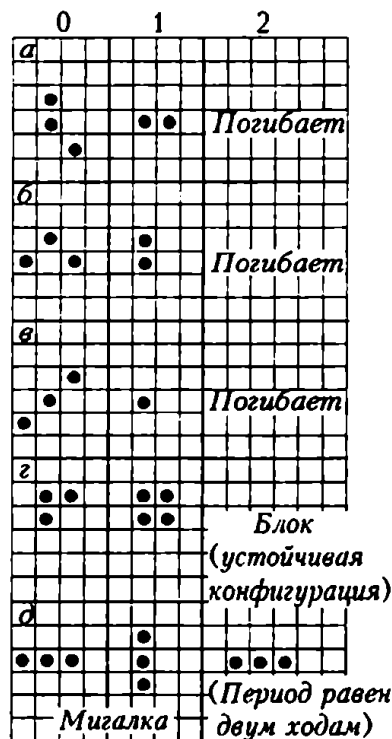


Рис. 1. Эволюция пяти триплетов

(б) и (в) — на втором ходу, а (г) — на третьем. Конфигурация (д) называется «навигационными огнями»; замечательна она тем, что на девятом ходу распадается на четыре отдельные «мигалки», дальнейшие превращения которых в самом деле напоминают «деятельность» светофоров.

На рисунке 3 изображены двенадцать наиболее часто встречающихся устойчивых конфигураций — «любителей спокойной жизни».

чаще всего погибает. На рисунке 1 изображены пять триплетов. Первые три погибают уже на втором ходу. Триплет (г) переходит в устойчивую конфигурацию из четырех фишек, называемую «блоком». Триплет (д) Конвей называет «мигалкой» — он превращается попеременно то в вертикальный, то снова в горизонтальный ряд.

Отметим еще, что любой диагональный ряд фишек постепенно вымирает: с каждым ходом число фишек на доске уменьшается на два («погибают» крайние фишки).

На рисунке 2 изображена эволюция пяти *тетрамино* — так Гарднер называет конфигурацию из четырех клеток, связанных между собой ходом ладьи. Конфигурация (а) нам уже известна — это «блок»; тетрамино (б), (в) и (г) переходят также в устойчивую конфигурацию, называемую «ульем»:

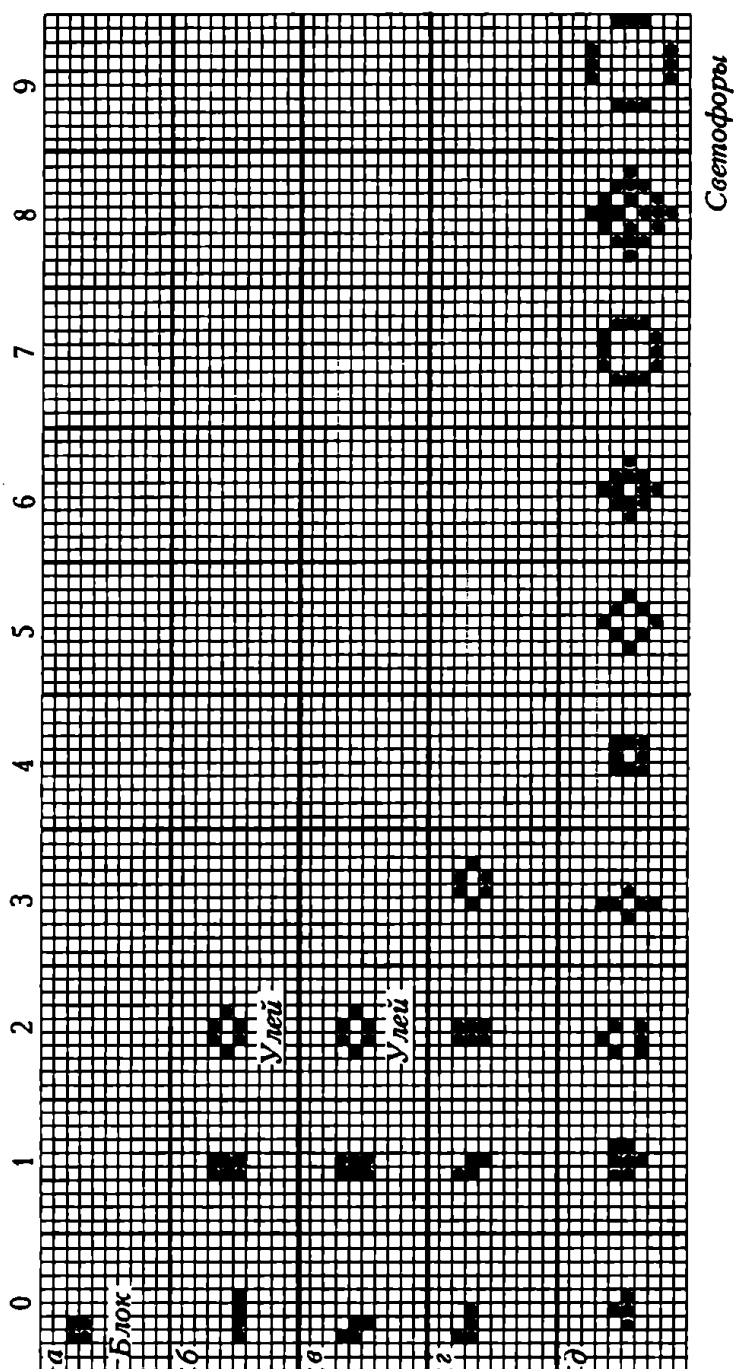


Рис.2. Эволюция пяти тетрамино

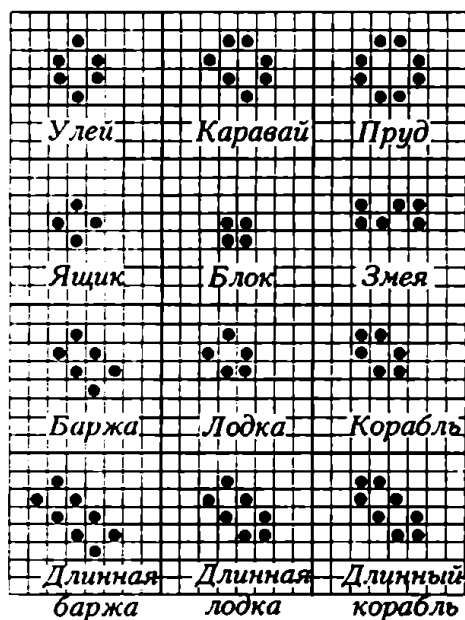


Рис.3. Устойчивые конфигурации

Задание 2. Выясните судьбу конфигураций, изображенных на рисунках 4,б–е.

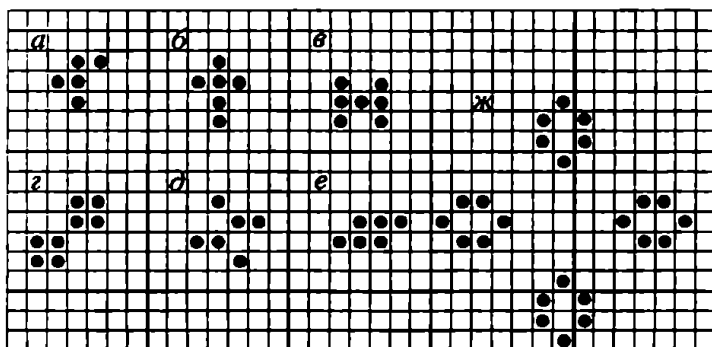


Рис.4

Заметим лишь, что если эволюция буквы **Н** заканчивается быстро, то буква **П** (или «ворота») неожиданно оказывается «должителем» — лишь после 173 хода она распадается на пять «мигалок», шесть «блоков» и два «пруда»!

На рисунке 5 изображена конфигурация из пяти фишек, которую Гарднер считает одним из самых изумительных открытий игры «Жизнь»; Конвей назвал ее «планером». Замечательно здесь то, что «планер» является фигурой, действительно перемещающейся по доске («летающей»): после второго хода он «входит

Задание 1. Существует двенадцать конфигураций из пяти клеток, связанных между собой ходом ладьи («пентамино»). Самой сложной из них является пентамино в форме буквы **г** (рис. 4,а). Эта конфигурация превращается в устойчивую лишь после тысяча сто третьего хода, распавшись при этом на восемь «блоков», четыре «мигалки», четыре «улья», «каравай», «лодку» и «корабль» (см. рис.3)! Получить этот результат без ЭВМ было бы, конечно, невозможно; только на экране мы сможем наблюдать за всеми изменениями, происходящими на доске. Попробуйте выяснить, что будет происходить с остальными одиннадцатью конфигурациями.

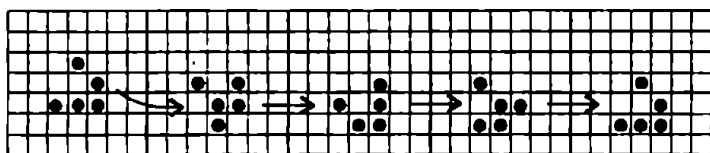


Рис.5. «Планер»

в пике», а на четвертом ходу переходит в себя, смещаясь при этом на одну клетку вправо и одну вниз относительно начальной позиции. В игре «Жизнь» скорость, с которой по доске перемещается шахматный король, называется «скоростью света». Связано это с тем, что большие скорости в этой игре просто не достигаются: ни одна конфигурация не воспроизводит себя настолько быстро, чтобы двигаться с такой скоростью. Скорость движения фигуры у Конвея равна дроби, в знаменателе которой стоит число ходов, необходимых для воспроизведения фигуры, а в числителе — число клеток, на которое она при этом смещается. Скорость «планера» (по диагонали) составляет $1/4$ скорости

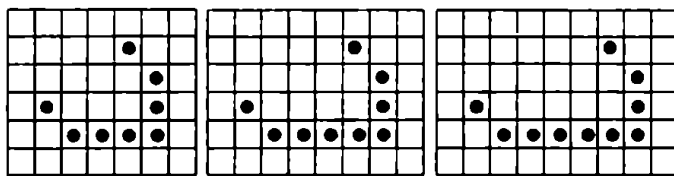


Рис.6. «Космические корабли»

света (проверьте это!). Конвей доказал, что в «Жизни» такая скорость (по диагонали) будет максимальной и что скорость любой конечной фигуры, перемещающейся по вертикали или по горизонтали, не может превышать половины скорости света. На рисунке 6 показаны три «космических корабля» («планер» — самый «легкий» из всех «космических кораблей»), передвигающиеся по горизонтали со скоростью, равной половине скорости света. «В полете из них вылетают «искры», — пишет Гарднер, — которые тут же гаснут при дальнейшим движении «корабля». Оказывается, что «сверхтяжелые комические корабли» (у них горизонтальный ряд состоит более чем из шести фишек) уже требует эскорта из двух или большего числа «кораблей» меньших размеров, в противном случае на доске появляются

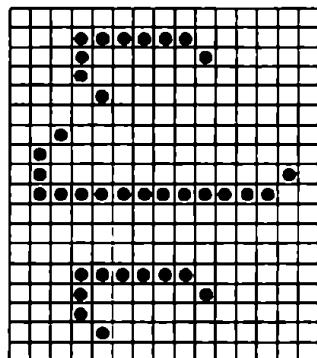


Рис.7

ся мелкие фигуры, мешающие движению. На рисунке 7 изображен самый тяжелый из «космических кораблей», которым достаточно иметь два сопровождающих более легких «корабля». Как вычислил Конвей, «кораблю» длиной в 100 клеток нужен эскорт, состоящий уже из тридцати кораблей.

Проблема «роста»

Пожалуй, самой сложной задачей игры «Жизнь» была следующая: *существует ли такая конечная исходная колония, число «организмов» которойросло бы при переходе от поколения к поколению бесконечно.*

Опубликовав свою игру, Конвей пообещал премию тому, кто найдет ответ на этот вопрос. Задача была решена в ноябре 1970 года группой математиков Массачусетского технологического института: они построили конфигурацию (рис.8), про которую

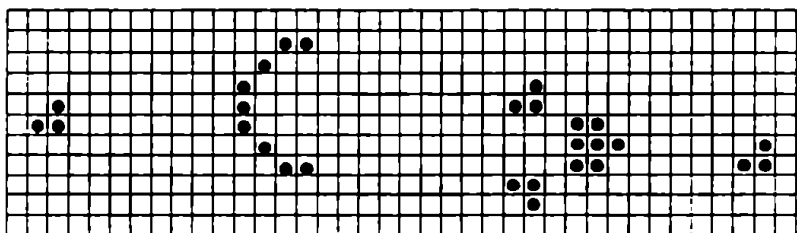


Рис.8. «Планерное ружье»

Гарднер говорит, что она «стреляет «планерами», — первый «планер» образуется на сороковом ходу, после чего каждые тридцать ходов прибавляется еще один «планер». Конфигурация эта получила название «*планерного ружья*»; понятно, что каждый «выстрел» увеличивает число организмов на пять, и, значит, исходная колония растет беспредельно.

Позднее те же математики умудрились так скомбинировать придуманные ими «ружья», что, помимо потока «планеров», через каждые 300 ходов «запускался» даже целый «космический корабль»!

Улыбка

В заключение приведем примеры еще двух интересных конфигураций.

Первая — это так называемый «*Чеширский кот*» (рис.9): на пятом ходу от его «морды» остается лишь «улыбка» (e), исчезающая на следующем ходу и затем превращающаяся уже в

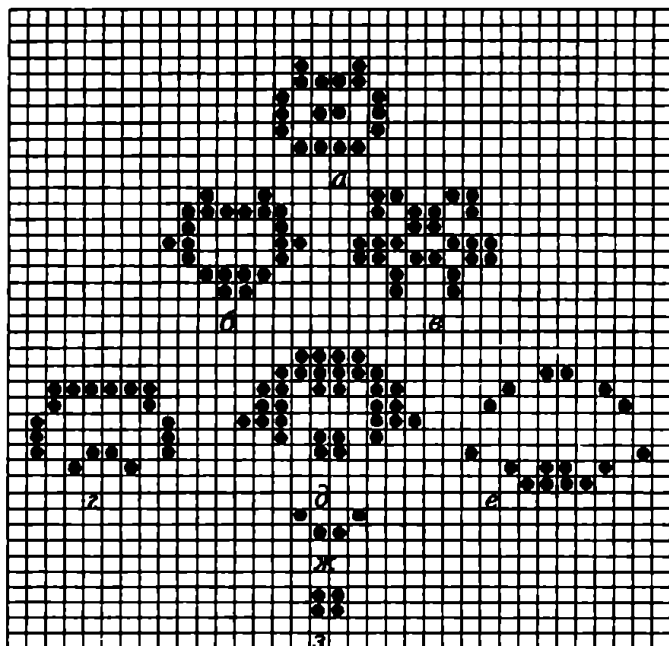


Рис.9. «Чеширский кот»

устойчивую конфигурацию — «блок», которую Гарднер называет «отпечатком кошачьей лапы, напоминающей о том, что некогда на этом месте находится кот».

Вторая конфигурация называется «Жнейка» (рис.10); она движется по бесконечной диагонали снизу вверх и оставляет на своем пути «снопы» — устойчивые конфигурации. «К сожалению»

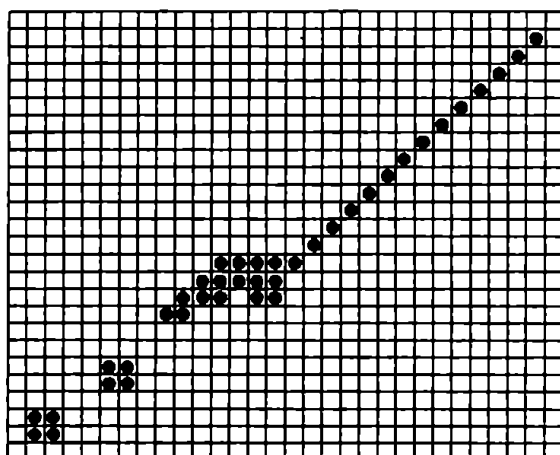


Рис.10. «Жнейка»

нию, – пишет изобретатель «жнейки», – мне не удалось придумать сеятеля – движущуюся фигурку, которая могла бы засеивать поле с той же скоростью, с которой жнейка его убирает».

И, наконец, отметим, что игра «Жизнь» – далеко не только игра; она по праву заняла видное место в «теории клеточных автоматов», вызвав интерес у многих ученых, занимающихся проблемами использования ЭВМ. «Например, создание «планерного ружья», – пишет Гарднер, – открывает волнующую возможность имитации в игре Конвея машины Тьюринга¹, способной (в принципе) производить все действия, которые только доступны самым совершенным из современных ЭВМ».

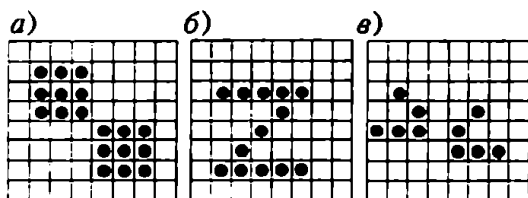


Рис. 11

Задание 4. Как ведут себя конфигурации, изображенные на рисунке 11. а, б, в («восьмерка», буква Z, два «планера», летящие навстречу друг другу)?

Читателям, заинтересовавшимся игрой Конвей, мы предлагаем еще несколько задач.

Задание 3. Что происходит с горизонтальными рядами из n фишек при $n = 5, 6, \dots, 9$?

¹ Машина Тьюринга – это идеальный автомат, способный производить любые вычисления, изобретен английским математиком А. М. Тьюрингом.

А. Орлов

Автор: Давайте поиграем...

Возмущенный читатель: Как? Я хочу заниматься математикой, а вы...

Автор: Но играть-то вы любите?

Недоумевающий читатель: Кто же не любит? Но при чем здесь математика?

Автор: Вы увидите, как математика поможет вам найти беспроигрышную стратегию игры.

«Цзяньшицзы»

В двух кучках лежат камни, в первой – 7, во второй – 5. Играют двое, ходят по очереди. Каждый из игроков при своем ходе может взять либо любое число камней из первой кучки, либо любое число камней из второй кучки, либо поровну камней из обеих кучек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Как играть, чтобы выиграть? Можно ли заранее предсказать, кто победит в этой игре – начинающий или его противник (если оба играют идеально)?

Как ответить на эти вопросы? Можно поставить эксперимент, т.е. просто поиграть. Тогда вы быстро обнаружите, что начинающий всегда может выиграть, если он первым ходом возьмет 4 камня из большой кучки. А как вы думаете, какой будет ответ, если сначала в первой кучке было 7 камней, а во второй – 4? А если в первой было 9, а во второй – 6?

«Ферзя – в угол!»

На поле f8 шахматной доски стоит ферзь (рис.1). Играют двое, ходят по очереди. Каждый за один ход может передвинуть ферзя либо на несколько клеток вниз по вертикали, либо на несколько клеток влево по горизонтали, либо

Опубликовано в «Кванте» №3 за 1977 г.

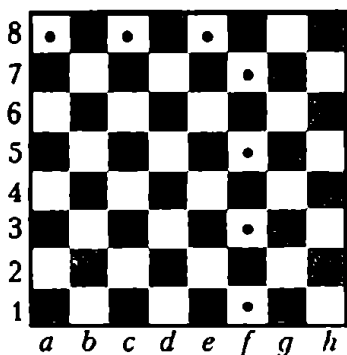


Рис. 1

на несколько клеток влево – вниз по диагонали (на рисунке 1 отмечены клетки, на которые можно попасть с поля f8 за один ход).

Проигрывает тот, кому некуда ходить (а выигрывает, следовательно, тот, кто загонит ферзя в левый нижний угол – на поле a1). Как играть, чтобы выиграть? Кто победит – начинающий или его партнер? И «кто – кого», если ферзь сначала стоял на поле e8?

Можно опять попробовать поиграть. А можно поразмышлять.

Строим теорию

Начнем со второй игры, причем с конца. Если ферзь стоит на поле a1, то тот, чья очередь ходить, уже проиграл. Поэтому отметим это поле знаком «минус» (рис.2).

Если ферзь стоит на поле, с которого одним ходом можно попасть на a1, то начинающий пойдет на a1 и выиграет. Поэтому отметим поля, с которых можно за один ход попасть на a1, знаком «плюс».

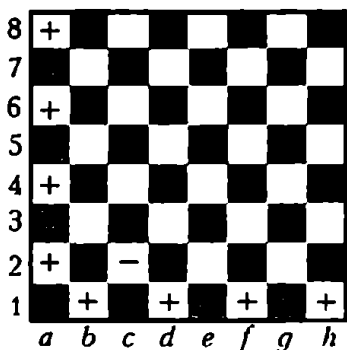


Рис. 2

Пусть теперь ферзь стоит на поле c2. Проиграет начинающий или выиграет? Конечно, проиграет: при любом своем ходе он попадает на «плюс», после чего противник ставит ферзя на a1. Поэтому c2 отметим «минусом» (рис.2).

А как поступать, если ферзь стоит на одной вертикали с c2, но выше? Конечно, идти на c2, на «минус»!

Тогда, как мы уже выясняли, противник обязательно проиграет. Поля c3, c4, ..., c8 отметим плюсами, потому что игрок, который начинает с одного из этих полей, при правильной игре обязательно победит. По той же причине поставим плюсы на поля d2, e2, ..., h2 и d3, e4, ..., h7.

Можно ли более просто описать правила, по которым мы расставляем плюсы и минусы, не повторяя каждый раз рассуждений о том, какой из игроков выиграет? Конечно, можно! Вот они.

«Золотые правила»

- (1) Если с поля некуда пойти – ставим минус.
- (2) Если с рассматриваемого поля можно попасть на поле, отмеченное минусом, – ставим плюс.
- (3) Если все ходы ведут на поля, отмеченные плюсами, – ставим минус.

Расстановка плюсов и минусов в соответствии с «золотыми правилами» для игры «ферзя – в угол!» приведена на рисунке 3.

Мы сформулировали правила, в соответствии с которыми начали расставлять плюсы и минусы, а затем уже по этим правилам закончили расстановку. Докажем теперь, что мы не ошиблись: *если ферзь стоит на поле, отмеченным плюсом, то начинающий выигрывает, а в противном случае – проигрывает.*

Доказать это очень легко, надо просто играть по правилу: «Ставь на минус!». По «золотому правилу» (2) первый ход можно сделать на минус. Тогда по «золотому правилу» (3) противник вынужден будет пойти на плюс. А начинающий – снова на минус, противник – опять на плюс... Так будет продолжаться, пока ферзь не попадет на поле, с которого никуда нельзя пойти – на a1. Попадет он туда как раз после хода начинающего, который тем самым выиграет.

Если же начальное поле отмечено минусом, то придется пойти на плюс. Тогда второй игрок применит правило «ставь на минус!» и выиграет.

Следовательно, если ферзь сначала стоял на f8, то начинающий при правильной игре победит, как бы хорошо ни играл его противник, а если на e8, то начинающий проигрывает, если партнер достаточно умен.

8	+		+	-		+		
7		+		+		+		
6	+		+		+		+	
5		+		+		+	-	
4	+		+		+		+	
3		-		+		+		
2	+		-		+		+	
1		+		+		+		
	a	b	c	d	e	f	g	h

Рис. 3

Вернемся к «цзяньшицзы»

Автор: А зачем возвращаться? Мы уже знаем, как играть. Ведь «ферзя – в угол!» и «цзяньшицзы» одинаковы?

Читатель: ???

Автор: Сейчас убедитесь.

На рисунке 1, относящемся к игре «ферзя – в угол!», под ферзем стоят 7 точек, а слева от ферзя – 5, как раз числа из игры

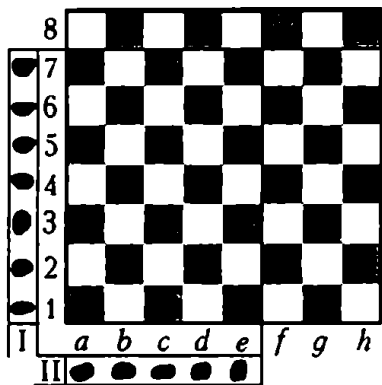


Рис. 4

«цзяньшицзы». Попробуем установить связь между этими двумя играми. Только камни расположим не как точки на рисунке 1, а так, как показано на рисунке 4, – за пределами доски.

Соответствие между позициями. Каждому положению ферзя на доске сопоставим две кучки камней: в первой – столько камней, сколько горизонталей находится под ферзем, а во второй – сколько вертикалей слева от ферзя.

Тогда, обратно, каждый набор камней в двух кучках (но не более 7 в каждой) определяет положение ферзя на доске.

Контрольные вопросы

1. Каким полям доски соответствуют такие распределения камней по кучкам:

- а) I–5, II–3;
- б) I–2, II–7;
- в) I–6, II–0;
- г) I–7, II–7?

2. Какие распределения камней по кучкам соответствуют следующим полям доски:

- а) e6;
- б) c2;
- в) a5.

Мы установили соответствие между позициями в двух играх: каждому распределению камней по кучкам соответствует поле шахматной доски и, наоборот, каждому полю доски соответствует пара кучек камней. Теперь легко установить соответствие и между возможными ходами. Если берется несколько камней из первой кучки, то ферзь сдвинется на столько же полей вниз, если из второй – ферзь сдвинется на столько же полей влево, а если камни взяты из обеих кучек сразу, то ферзь сдвинется влево – вниз по диагонали. Например, если первым ходом из каждой кучки берется по 2 камня, то ферзь ходит с f8 на d6.

Изоморфизм игр

Вы видите, что совсем не нужно разрабатывать новую теорию для «цзяньшицзы», можно воспользоваться теорией для «ферзя

– в угол!». Надо просто «перевести» позиции на шахматную доску и посмотреть, какие – проигрышные.¹

Начальная позиция (7 камней в первой кучке, 5 – во второй) соответствует положению ферзя на f8. Начинающий выиграет, если он первым ходом пойдет на f4, или на e8, или на d6. На языке камней: если он возьмет четыре камня из первой кучки, или один – из второй, или по два из каждой. Теория помогла нам найти еще два способа выигрыша, которые не были обнаружены при эксперименте!

Если сначала в первой кучке было 7 камней, а во второй – 4, то начинающий при разумной игре противника проиграет (почему?).

Пусть теперь в первой кучке – 9 камней, во второй – 6... Что делать? На шахматной доске эта позиция не умещается! Ну и что? Продолжим расстановку плюсов и минусов вправо и вверх, не ограничиваясь размерами доски (сделайте это сами на листе клетчатой бумаги). Начинающий выиграет, взяв по два камня из каждой кучки.

Итак, различие между играми «ферзь – в угол!» и «цзяньшицзы» – чисто внешнее: позиции и ходы одной игры соответствуют позициям и ходам другой. Такие игры называют «изоморфными».

Слово «изоморфизм» произошло от греческих слов «изос» (постоянный, неизменный) и «морфэ» (форма). В математике слово «изоморфизм» встречается очень часто – его употребляют, когда нужно отметить, что различие между объектами чисто внешнее, как между нашими двумя играми.

Одномерная теория

Мы научились расставлять плюсы и минусы на шахматной доске, но делаем это последовательно: начинаем с a1, потом отмечаем клетки, с которых можно попасть на a1, затем – те, с которых можно попасть только на уже отмеченные, и так далее. А нельзя ли указать правило, по которому можно сразу узнать, является поле выигрышным или проигрышным, не расставляя при этом плюсы и минусы на все предыдущие поля? Иногда можно. Мы разберем одну одномерную игру, т.е. игру с одной кучкой камней (или, что то же самое, игру на полоске клетчатой бумаги).

¹ Честно говоря, игра «ферзя – в угол!» была придумана для того, чтобы придать наглядность разбору «цзяньшицзы» – легче смотреть на шахматную доску, чем на список позиций в «цзяньшицзы».

Имеется полоска клетчатой бумаги длины n (клеток). На одной из клеток стоит фишка. Играют двое, ходят по очереди. Ход состоит в передвижении фишки на 1, 2 или 3 клетки влево. Проигрывает тот, кому некуда ходить. Как играть, чтобы выиграть? При каких положениях фишки побеждает начинающий, а при каких – его партнер?

Расстановка плюсов и минусов в этой игре проводится, конечно, по тем же «золотым правилам». Поле 1 – проигрышное, ставим на него минус (рис.5); поля 2, 3, 4 – выигрышные (с них

п е р и о д

–	+	+	+	–	+	+	+	–	+		●
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		n

Рис. 5

за один ход можно попасть на поле 1), ставим на них плюсы; поле 5 – проигрышное, ставим минус, и так далее. Вы видите, что плюсы и минусы образуют пе-

риодическую последовательность с периодом из четырех знаков: – + + +, т.е. на полях вида $4n + 1$ стоят минусы, на остальных – плюсы.

А будет ли периодичной последовательность плюсов и минусов в такой игре, если фишку можно передвигать лишь на 1 или 3 клетки влево? Этот и другие вопросы мы предоставим решить вам.

Задачи

Читатель: А они трудные?

Автор: Сначала идут легкие, потом – трудные, а последняя – проблема, ее и я решать не умею.

Игры на шахматной доске

1 («Король – в угол!»). Король стоит на некотором поле шахматной доски. Играют двое, ходят королем по очереди (на 1 поле вниз, влево или влево-вниз по диагонали). Проигрывает тот, кому некуда ходить.

Расставьте на доске «плюсы» и «минусы» по «золотым правилам» и тем самым выясните, когда выигрывает начинающий, а когда – его партнер. Можно ли узнать, плюс или минус стоит на данном поле, не нанося знаки на все предыдущие поля, т.е. сразу по номеру вертикали и горизонтали данного поля?

2. Те же вопросы, если ходить можно на 1 или 2 клетки влево или на 1 или 2 клетки вниз (а по диагонали ходить нельзя).

3. Те же вопросы, если ходить можно на 1 или 2 клетки влево или вниз или на 1 клетку влево – вниз по диагонали.

4 («Король – в угол дырявой доски!»). Из шахматной доски выре-

зали несколько полей (см. рис.6). Условия игры—как в задаче 1, но ставить короля в «дырки» запрещается. Вопросы — те же.

5 («Коня — в угол!»). Заменим в условии задачи 1 короля конем, которому разрешено ходить на 2 клетки вниз и затем на 1 влево или вправо или на 2 влево и затем на 1 вверх или вниз (но в пределах доски). Вопросы — те же.

6 («Ладью — в угол!»). Заменим в условии задачи 1 короля ладьей, которая может ходить на любое число полей, но только либо вниз, либо влево (но не по диагонали). Вопросы — те же.

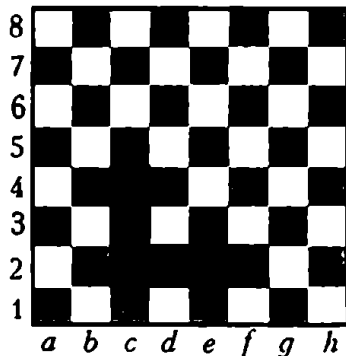


Рис. 6

Одномерные игры

7. На одном из полей полоски клеточной бумаги длины n (см. рис.5) стоит фишка. Играют двое, ходят по очереди. Проигрывает тот, кому некуда ходить.

Расставьте на полях «плюсы» и «минусы» (по «золотым правилам») и попробуйте найти период расстановки (если он есть), если ход состоит в перемещении фишки влево на

- а) 1 или 3 клетки;
- б) 2 или 5 клеток;
- в) 2 или 4 клетки;
- г) 2, 4 или 7 клеток;
- д) 2, 3 или 5 клеток;
- е) 2, 3, 5 или 7 клеток.

8. Пусть в условиях задачи 7 ходить можно лишь на a или b клеток влево.

а) Докажите, что расстановка «плюсов» и «минусов» периодична и повторяется, во всяком случае, через $a + b$ клеток.

б) Найдите формулу, выражающую длину наименьшего периода через a и b . Опишите строение этого периода.

9 (обратная задача). Для некоторых a и b нарисована полоска и на ней расставлены «плюсы» и «минусы». Можно ли по этой полоске определить a и b (например, для полоски на рисунке 7)?

10. Докажите, что каков бы ни был набор возможных ходов, расстановка «плюсов» и «минусов» на полоске имеет период (который начинается, быть может, не с самой первой слева клетки, а с некоторой другой).

11. Для некоторого набора возможных ходов на полоске расставлены «плю-

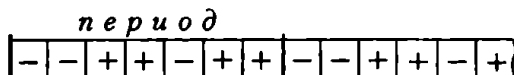


Рис. 7

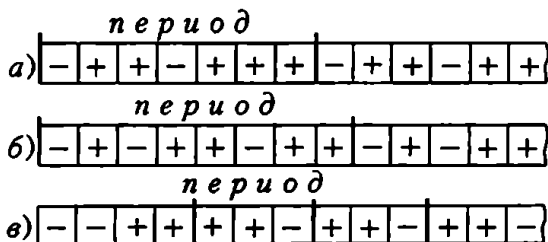


Рис. 8

12. На полоске расставлены «плюсы» и «минусы», причем с некоторого места расстановка периодична (рис.9). Всегда ли можно

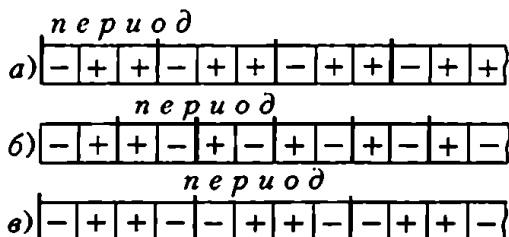


Рис. 9

о́да, если перемещать фишку можно влево на a_1, a_2, \dots, a_{k-1} или a_k клеток;

б) описать все игры, в которых период начинается с первой клетки.

сы» и «минусы» (рис.8). Можно ли по этой полоске восстановить набор возможных ходов? Однозначно ли он восстанавливается, т.е. может ли разным наборам ходов соответствовать одна и та же расстановка «плюсов» и «минусов» на полоске?

придумать набор возможных ходов, для которого расстановка «плюсов» и «минусов» на полоске будет иметь именно такой вид?

13* (проблема). Попробуйте

а) найти формулу, выражающую длину пери-

«ФЕРЗЯ – В УГОЛ», «ЦЗЯНЬШИЦЗЫ» И ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ

А. Матулис, А. Савукина

Мы хотим познакомить вас с еще одним, довольно неожиданным, применением чисел Фибоначчи.

Мы увидим, что числа Фибоначчи помогают построить теорию древней китайской игры «цзяньшицзы» и связанной с ней игры «ферзя – в угол». Этим играм посвящена также статья А. Орлова «Ставь на минус!» (см. настоящий сборник).

Здесь мы наметим несколько иной подход к решению той же задачи.

«Цзяньшицзы» и «ферзя – в угол»

Условия старинной игры «цзяньшицзы» (выбирание камней) таковы. Имеются две кучки камней (или каких-нибудь других предметов, например спичек). Двое играющих поочередно выбирают камни из этих кучек, причем за один ход можно либо взять любое число камней из одной (какой угодно) кучки, либо поровну из обеих кучек сразу. Выигрывает тот, кто возьмет последний камень.

Нам требуется найти правила беспронигрышной игры.

Пусть в одной кучке a камней, во второй b камней. Поставим в соответствие паре чисел (a, b) клетку (бесконечной!) шахматной доски, изображенной на рисунке 1, и поместим в клетку (a, b) ферзя.

Легко видеть, что каждому ходу в игре «цзяньшицзы» соот-

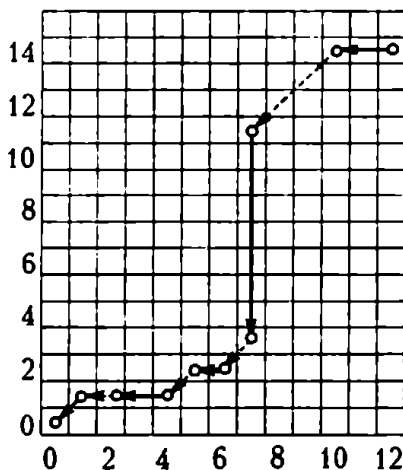


Рис. 1

Опубликовано в «Кванте» №7 за 1984 г.

ветствует некоторый ход ферзя: если игрок берет k камней из первой кучки, то ферзь смещается на k клеток влево; если игрок берет l камней из второй кучки – ферзь смещается на l клеток вниз; если же он берет по m камней из каждой кучки, ферзь смещается на m клеток по диагонали влево и вниз.

Итак, вместо игры «цзяньшицзы» можно рассматривать игру «ферзя – в угол» с такими правилами: на бесконечной шахматной доске стоит ферзь. Два игрока по очереди перемещают ферзя так, чтобы он приближался к угловому полю $(0, 0)$, т.е. за один ход разрешается смещать ферзя на любое число клеток либо влево, либо вниз, либо по диагонали влево и вниз. Выигрывает тот, кто приведет ферзя на поле $(0, 0)$.

На рисунке 1 изображен ход игры, начинающейся в клетке $(12, 14)$, где сплошные стрелки указывают ходы первого игрока, а пунктирные – второго; выиграл здесь первый игрок.

Понятно, что любой партии игры в «цзяньшицзы» соответствует некоторая партия игры «ферзя – в угол», а партии игры «ферзя – в угол» – партия «цзяньшицзы». Поэтому в дальнейшей мы будем говорить только об игре «ферзя – в угол».

Проигрышные поля

На рисунке 2 изображена бесконечная шахматная доска, на которой некоторые поля помечены знаком « \ast ». Эти поля мы будем называть также проигрышными. Нетрудно видеть, что

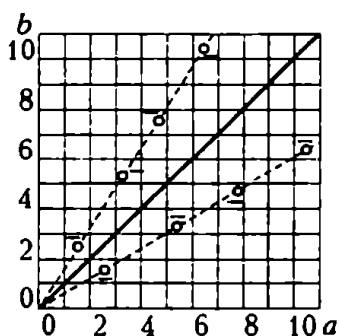


Рис. 2

если один из играющих будет каждым своим ходом ставить ферзя на отмеченное поле, то он выигрывает.

В самом деле, ни из какого отмеченного поля нельзя перейти ходом ферзя на отмеченное поле. Напротив, из любого неотмеченного поля можно одним ходом перейти на отмеченное. Поэтому, поставив ферзя на отмеченное поле, вы вынуждаете вашего противника сойти с отмеченного поля. Следующим ходом вы можете снова шагнуть на отмеченное поле (более близкое к полю $(0, 0)$) и так далее. В конце концов вы шагнете на отмеченное поле $(0, 0)$ и выиграете.

Можно указать правило, по которому последовательно получаются отмеченные поля. Сначала отмечается поле $(0, 0)$. На это поле можно пойти с любого поля вертикали $a = 0$, горизонтали $b = 0$ и диагонали $a = b$. Ближайшие нерассмотренные поля – это поля $(1, 2)$ и $(2, 1)$. На одно из этих полей можно пойти из любых

полей вертикалей $a = 1$, $a = 2$, горизонталей $b = 1$ и $b = 2$ и диагонали $b - a = 1$, $a - b = 1$. С самих же полей $(1; 2)$ и $(2; 1)$ можно пойти только на неотмеченные поля. Значит, эти два поля мы должны отметить знаком $\leftarrow \rightarrow$. За этими полями следуют поля $(3; 5)$ и $(5; 3)$, которые мы тоже должны отметить, и так далее.

Поскольку симметричные относительно главной диагонали поля $(a; b)$ и $(b; a)$ в этой игре совершенно равноправны (это особенно понятно при формулировке игры на языке кучек камней: ведь $(a; b)$ и $(b; a)$ – это, разумеется, одно и то же положение, когда в одной кучке имеется a , а в другой b камней), мы в дальнейшем будем изучать отмеченные поля, лежащие в верхней половине доски, т.е. поля, для которых $b \geq a$.

Положение первых из таких полей приведено в таблице; здесь n – номер проигрышного поля.

Проигрышные поля (a_n, b_n)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19
b_n	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31

Из описанного выше способа построения проигрышных полей следует, что на каждой вертикали, на каждой горизонтали и на каждой диагонали $b - a = n$ ($n \in \mathbb{Z}$) имеется единственное отмеченное поле. При этом отмеченные поля нижней половины доски симметричны отмеченным полям $(a_n; b_n)$. Это поля $(b_n; a_n)$.

Свойства чисел (a_n, b_n)

Из таблицы видно, что наши числа $(a_n; b_n)$ обладают следующими свойствами.

1. Каждое натуральное число входит в проигрышные пары один и только один раз: либо в качестве a_n , либо в качестве b_n .

Это означает, что при любом натуральном N либо на N -й горизонтали, либо на N -й вертикали есть такое поле, причем эти два случая взаимно исключают друг друга.

Учитывая теперь отмеченные поля нижней половины доски, получаемые заменой $a \rightarrow b$, $b \rightarrow a$, мы можем утверждать, что каждая вертикаль и каждая горизонталь содержит одно и только одно отмеченное поле.

2. Для любого натурального n имеется единственная проигрышная пара $(a_n; b_n)$ такая, что выполняется равенство $b_n - a_n = n$.

Заметим, что на доске разность $b - a$ указывает расстояние от поля (a, b) до диагонали доски, измеренное по вертикали или по

горизонтали. Число n мы будем считать совпадающим с номером соответствующей диагонали доски.

Свойства 1 и 2 обеспечивают то, что с каждого неотмеченного поля можно одним ходом перейти на отмеченное, а всякий ход с отмеченного поля приводит на неотмеченное, – обстоятельства, которые обеспечивают выигрыш игроку, каждым своим ходом ставящему ферзя на отмеченное поле. (Если начальное положение ферзя – отмеченное, то начинающий при правильной игре второго игрока проигрывает, поэтому ему остается либо рассчитывать на ошибку противника – весьма правдоподобную, если тот не владеет правилами беспроигрышной игры, либо сразу капитулировать.)

В самом деле, с отмеченного поля все ходы ведут на неотмеченные поля. Если же поле (a, b) неотмеченное и $b - a = n > 0$, то при $a > a_n$ (и, значит, $b > b_n$) можно сразу перейти на поле $(a_n; b_n)$ ходом по диагонали. Если же $a < a_n$ (и $b < b_n$), то либо $a = a_k$, либо $b = b_l$. В первом случае $k < n$ (ибо $a_k = a < a_n$) и $b_k - a = b_k - a_k = k < n = b - a$, и поэтому $b > b_k$; из этого следует, что ферзя можно ходом по вертикали перевести в точку (a_k, b_k) . Если же $a = b_l$ и тем более $l < n$, то $b > a = b_l > a_l$, и ферзя можно одним ходом перевести в отмеченное поле (b_l, a_l) нижней половины доски.

Точно так же проверяется, что из каждого неотмеченного поля нижней половины доски ферзя можно одним ходом поставить на отмеченное поле.

Опишем еще одно рекуррентное правило построения последовательности (a_n, b_n) .

Пусть $a_0 = 0$, $b_0 = 0$. Пара (a_n, b_n) определяется так: a_n – наименьшее из натуральных чисел, отсутствующих среди чисел $a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}$, а $b_n = a_n + n$.

Упражнение 1. Докажите, что последовательность (a_n, b_n) совпадает с построенной ранее последовательностью проигрышных пар.

Описанные нами способы нахождения отмеченных пар довольно трудно применять в конкретных ситуациях. Как, например, узнать, будет ли отмеченной пара чисел (a, b) , если a и b очень велики (скажем, если a и b порядка миллиона)?

Частоты чисел a_n и b_n в ряду натуральных чисел

Заранее предупреждаем читателей, что в этом разделе мы ничего не будем доказывать, а лишь ограничимся некоторыми интуитивными соображениями, которые позволят нам угадать формулы для a_n и b_n .

Пусть N – натуральное число, A_N – количество чисел a_n , не превосходящих N , а B_N – количество не превосходящих N чисел b_n .

Тогда отношения $p_N = \frac{A_N}{N}$, $q_N = \frac{B_N}{N}$ указывают долю («частоту») чисел a_n , соответственно b_n , среди всех натуральных чисел от 1 до N . Ясно, что $p_N + q_N = 1$.

Выпишем ряд первых чисел p_N и q_N :

$$\begin{array}{ll} p_1 = 1/1, & q_1 = 0/1 = 0; \\ p_2 = 1/2 = 0,5, & q_2 = 1/2 = 0,5; \\ p_3 = 2/3 \approx 0,6667, & q_3 = 1/3 \approx 0,3333; \\ p_4 = 3/4 = 0,75, & q_4 = 1/4 = 0,25; \\ p_5 = 3/5 = 0,6, & q_5 = 2/5 = 0,4; \\ p_6 = 4/6 \approx 0,6667, & q_6 = 2/6 \approx 0,3333; \\ p_7 = 4/7 \approx 0,5714, & q_7 = 3/7 \approx 0,4286; \\ p_8 = 5/8 \approx 0,625, & q_8 = 3/8 \approx 0,375; \\ p_9 = 6/9 \approx 0,6667, & q_9 = 3/9 \approx 0,3333; \\ p_{10} = 6/10 = 0,6, & q_{10} = 4/10 = 0,4; \\ p_{11} = 7/11 \approx 0,6364, & q_{11} = 4/11 \approx 0,3636. \end{array}$$

Мы видим, что числа p_N не слишком сильно отличаются друг от друга и «группируются» около величины, близкой к 0,3 – 0,4. Можно рассчитывать, что с ростом N величины p_N и q_N стремятся к некоторым пределам, т.е. что существуют $\lim_{N \rightarrow \infty} p_N = p$ и $\lim_{N \rightarrow \infty} q_N = q$, причем числа p и q выражают частоту («плотность»), с какой встречаются в натуральном ряду числа a_n и b_n соответственно.

Если частота чисел a_n в натуральном ряду равна p , то эти числа составляют « p -ю долю» всех натуральных чисел, т.е. одно число a в среднем приходится на $\frac{1}{p} = u$ натуральных чисел. При равномерном распределении чисел a_n разность между соседними числами a_{i+1} и a_i этой последовательности должна была бы составить u , т.е. числа a_n должны образовывать арифметическую прогрессию $a_i = u \cdot i$, $a_2 = 2u, \dots, a_n = nu, \dots$ с разностью $u = \frac{1}{p}$.

Разумеется, в точности эти равенства выполняться не могут, так как числа нашей прогрессии – не целые; однако если допустить, что распределение чисел a_n «довольно равномерно», то можно надеяться, что $a_i \approx iu$, $i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$ Здесь знак \approx означает лишь, что правая часть не слишком сильно отличается от левой. Точно так же рассуждая, получим для чисел b_n приближенное равенство $b_i \approx iv$, $q_i = 1, 2, \dots, n, \dots$, где $v = \frac{1}{q}$.

Поскольку $p + q = 1$, числа $u = \frac{1}{p}$ и $v = \frac{1}{q}$ удовлетворяют условию

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 1.$$

По свойству 2, $b_n - a_n = n$. Поэтому в силу нашего допущения $b_n \approx nv$, $a_n \approx nu$. Получим $nv - nu \approx n$, т.е. $v - u \approx 1$.

Поэтому естественно искать числа u и v , исходя из системы $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 1$, $v - u = 1$, $u > 0$, $v > 0$. Решая эту систему, получим

$$u = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad v = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Из равенства $a_i \approx \frac{v}{u}$ и $b_i \approx iv$ следует, что $b_i \approx \frac{v}{u} a_i = ua_i$ (легко проверить, что $v = u^2$). Линия $b = ua$ и симметричная ей линия $b = \frac{1}{u}a$ в нижней половине доски изображены пунктиром на рисунке 2^u, а принадлежащие этим линиям точки $a_i = ui$ и $b_i = vi$ отмечены кружочками. Эти точки, естественно, не совпадают с левыми нижними углами проигрышных клеток доски. Однако все кружки на рисунке принадлежат отмеченным клеткам. Естественно предположить, что $a_i = [ui]$, а $b_i = [vi]$, где квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Основная теорема

Теперь мы можем забыть все соображения, которые привели нас к выписанным выражениям для проигрышных полей (a_n, b_n) , и сразу сформулировать следующую основную теорему.

Теорема 1. Пусть $u = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $v = u^2 = u + 1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$. Поле (a, b) , где $b > a$, в том и только в том случае является проигрышным, если существует натуральное число n такое, что $a = [nu]$, $b = [nv]$. Если такого натурального n не существует, то позиция является выигрышной.

Доказательство. Рассмотрим последовательность точек

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n), \dots,$$

где $a_n = [nu]$, $b_n = [nv]$, и докажем, что для этой последовательности выполнены свойства 1 и 2. Начнем со свойства 1.

Сначала убедимся в том, что все числа a_1, b_1, a_2, b_2 различны. Числа $a_i = [iu]$ различны, так как $u > 1$. По той же причине ($v > 1$) различны числа $b_j = [jv]$. Предположим, что какие-то два из чисел a_j и b_j совпадают. Это значит, что $[iu] = [jv] = k$. Поэтому $iu = k + \delta_1$, где $0 < \delta_1 < 1$, $jv = k + \delta_2$. Разделив первое равенство на u , второе на v , а

затем сложив полученные равенства, приходим к равенству

$$i + j = \frac{k}{u} + \frac{k}{v} + \frac{\delta_1}{u} + \frac{\delta_2}{v} = k + \frac{\delta_1}{u} + \frac{\delta_2}{v},$$

из которого следует, что

$$0 < i + j - k = \frac{\delta_1}{u} + \frac{\delta_2}{v} < \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 1,$$

что невозможно, так как число $i + j - k$ целое.

Теперь докажем, что каждое натуральное число встречается в последовательности $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$

Пусть N – произвольное натуральное число. Существует ровно $\left[\frac{N}{u} \right]$ чисел $a_i = [iu]$, меньших N . (Это числа с номерами $i = 1, 2, \dots, \left[\frac{N}{u} \right]$.)

И ровно $\left[\frac{N}{v} \right]$ чисел $b_j = [jv]$, меньших N (числа с номерами $j = 1, 2, \dots, \left[\frac{N}{v} \right]$). Всего чисел a_i и b_j , меньших N , существует $\left[\frac{N}{u} \right] + \left[\frac{N}{v} \right]$, а так как $\frac{N}{u}$ и $\frac{N}{v}$ – нецелые числа, $\frac{N}{u} - 1 + \frac{N}{v} < \left[\frac{N}{u} \right] + \left[\frac{N}{v} \right] < \frac{N}{u} + \frac{N}{v}$, т.е.

$$N - 2 < \left[\frac{N}{u} \right] + \left[\frac{N}{v} \right] < N.$$

Таким образом, $\left[\frac{N}{u} \right] + \left[\frac{N}{v} \right] = N - 1$. Но это означает, что чисел вида a_i и b_j , меньших N , имеется в точности столько, сколько всего натуральных чисел, меньших N . Поскольку все числа a_i и b_j различны, свойство 1 последовательности $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n), \dots$ доказано.

Свойство 2 доказывается без труда:

$$b_n - a_n = [vn] - [un] = [(u+1)n] - [vn] - [un] = [nu] + n - [un] = n.$$

Тем самым основная теорема полностью доказана.

Появляются числа Фибоначчи

Согласно основной теореме, для определения проигрышной пары с номером n надо умножить n на иррациональное число, заданное в виде бесконечной десятичной дроби. Возможно, что такое умножение вам не понравится, особенно если вы не имеете счетной машины. Как для определения проигрышных пар (a_n, b_n) обойтись только действиями над натуральными числами?

Для этой цели может послужить такое свойство проигрышных пар:

3. Если (a_n, b_n) – проигрышная пара, то пары $(b_n - 1, a_n + b_n - 1)$ и $(b_n + 1, a_n + b_n + 2)$ – тоже проигрышные.

При этом, исходя из начального поля $(0, 0)$ или первого поля $(1, 2)$, мы можем построить, пользуясь свойством 3, все проигрышные пары.

Наметим доказательство свойства 3.

Упражнение 2. Докажите, что для проигрышных пар (a_n, b_n) и (a_{n+1}, b_{n+1}) справедливы неравенства $2 \leq b_{n+1} - b_n \leq 3$, и $1 \leq a_{n+1} - a_n \leq 2$.

Из результатов упражнения 2 следует, что числа $b_n - 1$ и $b_n + 1$ не являются *большими* числами проигрышных пар. По свойству 1 существуют такие k и l , что $a_k = b_n - 1$, $a_l = b_n + 1$. Посмотрим, чему равны k и l .

По свойству 2, номер любой пары равен разности между большим и меньшим из чисел этой пары.

С другой стороны, из свойства 1 следует, что номер любой отмеченной пары (a_k, b_k) равен разности ее меньшего числа a_k и количества всех ненулевых $b_l < a_k$. При $a_l = b_n - 1$ количество чисел b_l , меньших a_l , равно $n - 1$. Это значит, что $k = b_n - 1 - (n - 1) = a_n$. Поэтому пара $(b_n - 1, b + a_n - 1)$ – отмеченная.

Упражнения

3. Докажите, что пара $(b_n + 1, a_n + b_n + 2)$ является отмеченной для всякой отмеченной пары (a_n, b_n) .

4. Докажите, что любая отмеченная пара (a_n, b_n) может быть получена из пары $(0, 0)$ или пар в $(1, 2)$ с помощью последовательного применения нескольких операций, описываемых свойством 3.

После сделанных нами замечаний мы можем сформулировать следующую теорему, дающую еще одно описание всех отмеченных пар.

Теорема 2. Пусть (a_n, b_n) – отмеченная пара. Если представить натуральное число $n - 1$ в виде суммы неповторяющихся чисел Фибоначчи: $n - 1 = f_{k_1} + f_{k_2} + \dots + f_{k_l}$, то $a_n - 1 = f_{k_1+1} + f_{k_2+1} + \dots + f_{k_l+1}$ или, иначе говоря, если $n - 1$ есть сумма некоторых попарно различных чисел Фибоначчи, то $a_n - 1$ есть такая же сумма чисел Фибоначчи с номерами на единицу большими.

Два варианта одной игры

В 1978 году «Квант», рассказывая о IX празднике юных математиков в Батуми (см. №10), предложил своим читателям придумать выигрышную стратегию для следующей игры:

Играют двое. Они по очереди вписывают в таблицу 3×3 числа от 1 до 9 (каждое должно быть использовано). Когда таблица заполнена, подсчитывают две суммы: сумму S_1 произведений по столбцам и сумму S_2 произведений по строкам. Если $S_1 > S_2$, выигрывает начинавший игру; если $S_1 < S_2$ – выигрывает второй игрок.

В 1971 году эта игра в несколько другой форме была популярна среди студентов механико-математического факультета МГУ (а узнали они о ней от студентов пермского университета). Называлась эта игра «Определитель» и выглядела так:

Играют двое. Они по очереди вписывают в таблицу 3×3 числа от 1 до 9 (каждое число должно быть использовано). Когда таблица заполнена, подсчитывают ее определитель d . Если $d > 0$, выигрывает начинавший игру; если $d < 0$ – выигрывает второй игрок.

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_7 & x_8 & x_9 \\ \hline \end{array}$$

Рис. 1

Тут, конечно, мы должны объяснить вам, что *определителем таблицы T* (рис.1) называется число

$$d = x_1x_5x_9 + x_2x_6x_7 + x_3x_4x_8 - x_3x_5x_7 - x_1x_6x_8 - x_2x_4x_9.$$

В том, что эти две игры по существу совпадают, мы предлагаем вам убедиться самостоятельно. Дальше мы будем рассматривать вариант, предложенный в «Кванте».

Опубликовано в «Кванте» №10 за 1981 г.

Все игры условно можно разделить на простые и сложные. Простые игры – это те, которые имеют несложные выигрывающие стратегии, сложные – все остальные. По-видимому, игра «Определитель» является сложной. Сложность – неперемное условие популярности игры. Например, в шахматы и в крестики-нолики на бесконечном листе клетчатой бумаги все играют с увлечением, а в крестики-нолики на доске «3 × 3» – разве что младшие школьники.

Решим задачу, которая поможет нам играть в «определитель»: найдем наименьшее и наибольшее значения суммы $S = x_1x_2x_3 + x_4x_5x_6 + x_7x_8x_9$ (x_1, x_2, \dots, x_9 – числа от 1 до 9).

Для нахождения наименьшего значения применим к трем ее слагаемым неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом:

$$\frac{x_1x_2x_3 + x_4x_5x_6 + x_7x_8x_9}{3} > \sqrt[3]{x_1x_2 \cdot \dots \cdot x_9} = \sqrt[3]{9!} = \sqrt[3]{70 \cdot 72^2} > 71.$$

Отсюда $S > 213$ и, поскольку S – целое число, $S \geq 214$. Но $2 \cdot 5 \cdot 7 + 1 \cdot 8 \cdot 9 + 3 \cdot 4 \cdot 6 = 70 + 72 + 72 = 214$; значит, искомое наименьшее значение равно 214.

Для нахождения наибольшего значения нашей суммы воспользуемся следующей леммой (докажите ее!): если числа a, b, c, d положительны, $ab = cd$ и $|a - b| > |c - d|$, то $a + b > c + d$.

Образуем новую сумму S' так: последнее слагаемое $x_7x_8x_9$ оставим без изменения, первое слагаемое $x'_1x'_2x'_3$ составим из трех самых маленьких чисел множества $\{x_1, x_2, \dots, x_6\}$, а второе слагаемое $x'_4x'_5x'_6$ – из остальных чисел этого множества. Тогда по лемме $S \leq S'$, причем знак равенства будет лишь в том случае, когда каждое из чисел x_1, x_2, x_3 больше (или меньше) каждого из чисел x_4, x_5, x_6 . Отсюда получаем, что значение суммы S будет наибольшим, если все сомножители первого слагаемого меньше всех сомножителей второго слагаемого, а те в свою очередь меньше всех сомножителей третьего слагаемого. Таким образом, искомое наибольшее значение равно $1 \cdot 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \cdot 6 + 7 \cdot 8 \cdot 9 = 6 + 120 + 504 = 630$.

Подведем итог: сумма S принимает наименьшее значение, когда ее слагаемые максимально близки (и равны, следовательно, примерно 71), наибольшее значение – когда они максимально различны. Отсюда практический совет играющему: стремись к тому, чтобы слагаемые противника были примерно одинаковыми (и равными 71), а собственные слагаемые – максимально различны!

Стратегия «71» для первого игрока

Допустим, что после вашего первого хода противник написал свое число в одном столбце или в одной строке с вашим числом. Тогда мы предлагаем вам следующую стратегию «71»:

Определим для каждой заполненной строки и каждого заполненного столбца таблицы число

$$m = \begin{cases} P/71, & \text{если } P \geq 72, \\ 71/P, & \text{если } P \leq 72, \end{cases}$$

где P – произведение чисел, написанных в данной строке или данном столбце.

Очередным ходом начинающий игрок должен *дополнять строку* или *столбец* по следующему правилу: если он *дополняет строку*, то – числом, дающим *минимально* возможное значение m для этой строки (чтобы произведение было как можно ближе к 71), а если *столбец*, то – числом, дающим *максимально* возможное значение m для этого столбца (чтобы произведение как можно больше отличалось от 71).

Поясним сказанное примером. Для удобства изложения занумеруем клетки нашей таблицы (рис.2) и будем записывать партию строчкой из девяти чисел с индексами, где индекс обозначает номер клетки, в которую на соответствующем ходе

а)			б)		
1	2	3			
4	5	6		3	
7	8	9		5	

Рис. 2

Рис. 3

вписано данное число. Убедимся, что в партии $3_5 5_8 1_2 4_6 7_2 9_8 9_3$ начинавший игру пользовался стратегией «71» (на первый ход стратегия ограничений не накладывает).

После первых двух ходов (рис.3, а) первый игрок по стратегии должен поставить в клетку № 2 число, дающее максимально возможное m . В данном случае максимум m может дать либо ход 1_2 , при котором произведение чисел второго столбца равно 15, либо ход 9_2 , дающий произведение 135. Так как $71/15 > > 135/71$, в клетку №2 нужно поставить 1, что и было сделано.

1	x_2	x_3
2	x_5	x_6
4	x_8	x_9

Рис. 4

После хода 4_6 (рис.3,б) в клетку №4 нужно поставить число, дающее минимум m , а именно 6_4 , и т.д.

Два частных случая

1. Если у играющего есть произведение $1 \times 2 \times 3$, или $1 \times 2 \times 4$, или $6 \times 8 \times 9$, или $7 \times 8 \times 9$, то он выигрывает независимо от того, как в таблице расположены остальные числа.

Докажем, например, что, когда в таблице есть столбец из чисел 1, 2, 4, начинающий выигрывает. Если, скажем, таблица выглядит так, как на рисунке 4, то

$$\frac{x_2 x_5 x_8 + x_3 x_6 x_9}{2} \geq \sqrt{x_2 x_5 x_8 x_3 x_6 x_9} = \sqrt{3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} > 212.$$

Значит, $S > 1 \cdot 2 \cdot 4 + 425 = 433$.

С другой стороны, значение суммы S_2 максимально, когда числа x_2 и x_3 меньше, чем x_5 и x_6 , а x_5 и x_6 меньше, чем x_8 и x_9 . Таким образом, $S_2 \leq 1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 9 = 387$, т.е. $S_1 > S_2$, что и утверждалось.

3	6	5
4		
7		

Рис. 5

2. Иногда при игре удастся использовать идею «цугцванга» — отсутствия разумных ходов у противника. Например, в ситуации, изображенной на рисунке 5, начинающий при любом ходе второго игрока может (и должен) поставить числа 1, 2 в один столбец, а 8, 9 — в другой.

Просчитав разные варианты, легко проверить, что это обеспечит начинающему выигрыш.

Попытка перебора

На первый взгляд игра «Определитель» кажется не очень сложной: соперники делают всего девять ходов и для каждого хода есть не более девяти вариантов — просчитаем все варианты и выберем нужный. Беда в том, что различных партий чересчур много.

В самом деле, для первого хода есть 81 вариант (одно из девяти чисел в одну из девяти клеток); для второго хода — 64 варианта и т. д. (рис.6) — всего

$$9^2 \cdot 8^2 \cdot 7^2 \cdot \dots \cdot 2^2 \cdot 1^2 = (9!)^2 \approx 1,3 \cdot 10^{11}$$

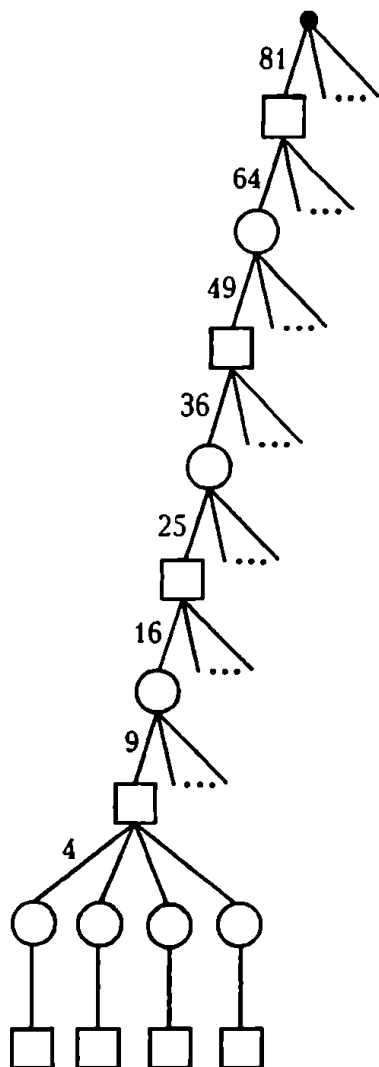


Рис. 6

числа партий до числа $9 \cdot 24 \cdot 7^2 \cdot 6^2 \cdot \dots \cdot 2^2 \cdot 1^2 \approx 5 \cdot 10^9$, которое, однако, по-прежнему очень велико. Нужна новая идея, сокращающая перебор вариантов. Такая идея нашлась.

Чем может помочь мудрец?

Предположим, что появился мудрец, утверждающий, что, начиная игру, он добьется победы, и пусть этот мудрец настолько добр, что в одинаковых позициях делает одинаковые ходы. Сколько партий нужно сыграть с мудрецом, чтобы проверить, что он на самом деле умеет выигрывать?

различных партий. Разумеется, определить результат игры таким перебором невозможно даже с помощью ЭВМ.

Правда, этот перебор слишком «груб», а оценка слишком завышена: ведь наша игра имеет *симметрию*. Например, все первые ходы в разные клетки одним и тем же числом равноправны; поэтому нужно рассматривать не 81, а только 9 вариантов первого хода. Восемь оставшихся для второго хода клеток можно разделить на три класса так, что ходы одним и тем же числом в клетки одного класса будут равноправны (на рисунке 7 клетки разных классов закрашены в разные цвета); поэтому нужно рассматривать не 64, а $8 \cdot 3 = 24$ варианта второго' хода. Так нам удастся снизить верхнюю оценку

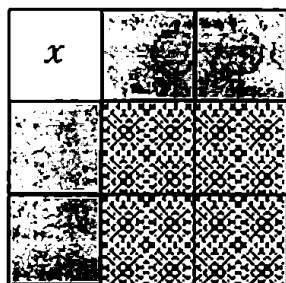


Рис. 7

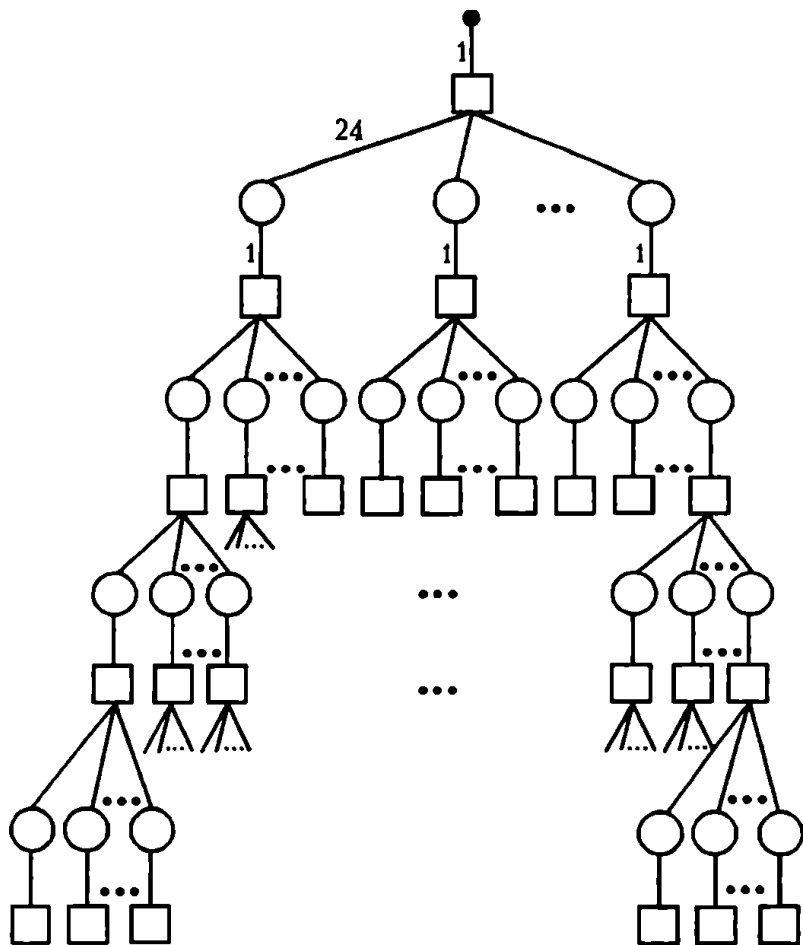


Рис. 8

Мудрец все партии начинает одинаково; мы же должны попробовать играть с ним все 24 варианта второго хода. В каждой позиции второго хода мудрец однозначно делает третий ход; мы же перебираем все 36 вариантов четвертого хода и т.д. (рис.8). Всего нужно сыграть $24 \cdot 6^2 \cdot 4^2 \cdot 2^2 = 55296$ партий, проверяющих мудреца.

Поиграв с мудрецом в течение месяца, можно убедиться в его беспронигрышности или доказать обратное. Можно составить и отладить программу на ЭВМ, проверяющую мудреца, что, правда, займет по времени тот же самый месяц, зато этой же программой можно проверять теперь на «выигрышность» любую стратегию.

Итак, проверяющая программа есть, но где же мудрец?

Пришлось автору научиться играть и, используя уже высказанные соображения и стратегии, постепенно исправляя ходы, не обеспечивающие выигрыша для начинающего (они обнаруживались с помощью проверяющей программы), «превратиться» в такого мудреца. Удалось доказать, что если играют два мудреца, то выигрывает начинающий; точнее, было доказано, что начинающий началом 7_1 имеет возможность выиграть при любых ответах противника. Был составлен своеобразный «справочник», в котором на все вторые и четвертые ходы противника указаны выигрывающие третьи и пятые ходы.

Заключение

Проверка стратегии «71» на «выигрышность» показала, что при первом ходе 7_1 на все вторые ходы, *при которых стратегия действует*, за исключением трех, она дает такой третий ход, что при любом четвертом ходе, за исключением девяти, стратегия «71» приводит к выигрышу. Исключительные случаи перечислены в таблице. Выигрывающий ход в таких случаях все-таки существует (см. таблицу), но он расходится с рекомендацией стратегии «71».

Позиция	Выигрывающий пятый ход
$7_1 3_4 1_7 2_8$	4_2
$7_1 3_4 1_7 4_8$	8_9
$7_1 3_4 1_7 2_5$	9_9
$7_1 3_4 1_7 4_5$	2_3
$7_1 3_4 1_7 5_5$	6_9
$7_1 3_4 1_7 8_9$	9_9
$7_1 6_2 2_3 9_6$	8_9
$7_1 8_2 1_3 2_5$	3_9
$7_1 8_2 1_3 2_4$	3_9

Укажем, кроме того, выигрывающие третьи ходы для тех случаев, когда стратегия «71» не действует:

$7_1 1_5 2_2$; $7_1 2_5 1_2$; $7_1 3_5 1_2$; $7_1 4_5 1_2$; $7_1 5_5 6_9$; $7_1 6_5 5_9$; $7_1 8_5 9_9$; $7_1 9_5 8_9$.

Что будет в случае, когда первый ход — не семерка, пока не выяснено. Неясно также, каков максимальный выигрыш $\Delta = S_1 - S_2$ начинающего (при точной игре двух партнеров) и существует ли вообще простая выигрывающая стратегия.

О. Долгов

- Так это же известная задача!
- А как она решается?
- Да нет! Условие известное, а решения я не знаю...

Милг. «Диалоги»

Слово Сэму Лойду

В плоской квадратной коробочке лежат 15 шашек с номерами. «Нормальное» расположение шашек показано на рисунке 1. На рисунке 2 показано другое расположение: шашки с номерами 14 и 15 переставлены. Нужно, передвигая по очереди по одной

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Рис. 1

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Рис. 2

шашке, перевести это расположение в «нормальное». Шашки передвигаются на свободное соседнее место, вынимать их из коробочки не разрешается.

Игру в 15 изобрел в семидесятых годах XIX века Сэм Лойд. Повальное увлечение ею быстро охватило Англию, а потом перекинулось и через Ла-Манш. Рассказывая об этом, Мартин Гарднер¹ приводит цитату из самого Лойда:

«Люди буквально помешались на этой головоломке. Из уст в уста передавались рассказы о лавочнике, забывшем открыть

Опубликовано в «Кванте» №2 за 1974 г.

¹ М. Гарднер, «Математические досуги». — М.: Мир, 1976.

свою лавку, о священнике, простоявшем под уличным фонарем долгую зимнюю ночь в надежде припомнить, как ему удалось решить задачу...

Один известный редактор из Балтимора рассказывает, что как-то раз он ушел в полдень на ленч и лишь поздней ночью был обнаружен вконец отчаявшимися сотрудниками газеты сидящим за столом и гоняющим взад-вперед по тарелке маленькие кусочки пирога!»

В 1879 году была опубликована математическая теория игры в 15, после чего игра быстро вышла из моды.

Математическую теорию, подорвавшую интерес к головоломке Лойда, Гарднер в своей книге не излагает. Между тем теория эта проста и поучительна.

Четные и нечетные перестановки

Расположим числа $1, \dots, 15$ в произвольном порядке. Например, так:

$$1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 5, 9, 10, 11, 12, 15, 14, 13 \quad (1)$$

или так:

$$1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 5, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 13. \quad (2)$$

Каждое из подобных расположений называется *перестановкой*.

Будем говорить, что в данной перестановке числа i и j образуют беспорядок, если $i > j$, но i стоит в этой перестановке левее j .

Пример. Числа 8 и 6 перестановке (1) образуют беспорядок.

Назовем перестановку *четной* (*нечетной*), если в ней четное (нечетное) число беспорядков.

Примеры. В перестановке (1) – девять, а в перестановке (2) – восемь беспорядков, так что (1) – нечетная, а (2) – четная перестановка.

Перестановка и игра в 15

Начертим на коробочке для игры в 15 такую ломаную, как на рисунке 3. Пройдем по этой ломаной из левого верхнего угла коробочки и выпишем номера шашек, которые мы будем последовательно проходить.

Примеры. Если шашки расположены так, как на рисунке 1, то мы получим перестановку (1); для расположения на рисунке 2 получится перестановка (2).

Проходя через пустую клетку, мы не пишем никакого номера. Поэтому одна и та же перестановка соответствует шестнадцати

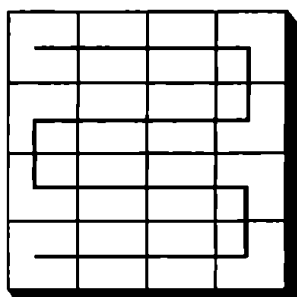


Рис. 3

различным расположениям шашек в коробочке. Например, перестановка

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,
12, 13, 14, 15

соответствует любому из расположений на рисунке 4.

При игре в 15 шашки можно передвигать по горизонталям и вертикалям, занимая соседнюю пустую клетку. Если шашка передвигается по горизонтали, то и старому, и новому расположению соответствует, очевидно, одна и та же перестановка (рис.4, а, б). Если шашку передвинуть

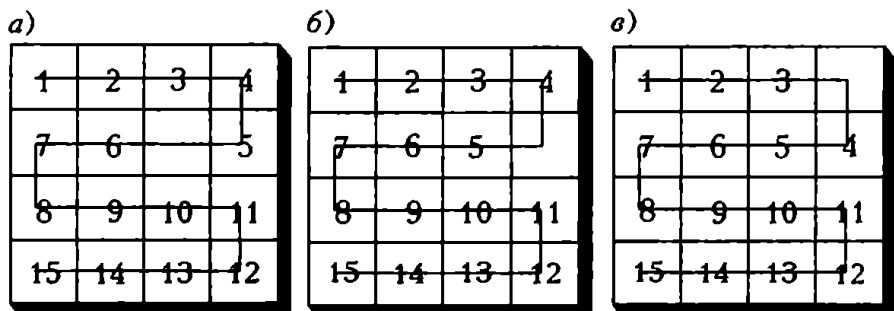


Рис. 4

по вертикали, то может случиться, что перестановка не меняется (рис.4, б, в), но обычно старому и новому расположению соответствуют разные перестановки (рис.5).

Однако эти перестановки всегда имеют, оказывается, *одинаковую четность* (либо обе четные, либо обе нечетные).

Проверим это сначала в случае, изображенном на рисунке 5. Расположению на рисунке 5, а соответствует перестановка

..., 6, 5, 11, 9, 10, ..., (а)

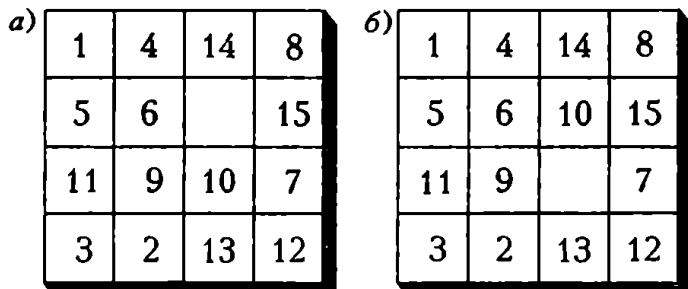


Рис. 5

расположению на рисунке 5,6 – перестановка

..., 10, 6, 5, 11, 9, ... (6)

(многоточия заменяют совпадающие в (а) и (б) числа). При переходе от (а) к (б) один беспорядок (11, 10) исчезает и три новых (10, 6), (10, 5) и (10, 9) возникают. Общее число беспорядков возрастает на 2, так что (а) и (б) имеют действительно одинаковую четность.

В общем случае, когда шашку с номером n передвинули с клетки A на пустую клетку B (рис.6), доказательство проводится совершенно аналогично. На участке ломаной между A и B располагается всегда четное число шашек. Пусть у m из них номера меньше n , у $k - m$ – больше n ; тогда m беспорядков при передвижении шашки исчезает и k беспорядков возникает. Общее число беспорядков изменяется на $k - m$. Это – четное число, так как по условию число $k + m$ четно. Таким образом, перестановки, соответствует старому и новому расположению, обязательно имеют *одинаковую четность*.

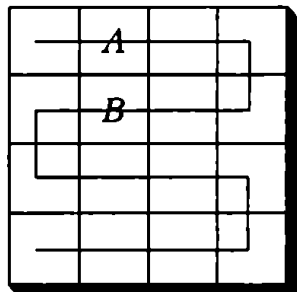


Рис. 6

Неразрешимость головоломки Лойда

Перестановки (1) и (2), соответствующие расположениям шашек на рисунках 1 и 2, имеют разную четность. Значит, эти расположения нельзя получить друг из друга: головоломка Лойда неразрешима.

Выйдет – не выйдет?

Ну, а если произвольно расположить шашки в коробочке? В каких случаях головоломка выйдет (расположение удастся перевести в «нормальное»), а в каких – не выйдет?

Мы уже знаем: если перестановка, соответствующая расположению, четная, то головоломка заведомо не выйдет. А если нечетная? Тогда, оказывается, обязательно выйдет.

Доказывать это утверждение можно по-разному. Ниже мы сделаем это примерно таким же способом, как С. Бобров в своей книге «Волшебный Двурог»³.

³ С. Бобров. «Волшебный Двурог». – Детгиз, 1946.

Как перепрыгнуть через две шашки

Начертим на коробочке замкнутый путь в виде буквы П (рис.7). Вдоль этого пути шашки можно передвигать одну за другой, «гуськом». Таким образом, можно, например, располо-

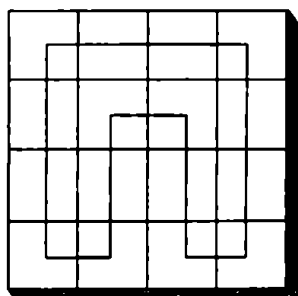


Рис. 7

жение, изображенное на рисунке 8, а, постепенно перевести в «нормальное» (рис.8, б, в, г, д). Это удастся сделать потому, что относительный порядок шашек вдоль пути П (начиная с шашки 1, по часовой стрелке) одинаков:

{1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 11, 7, 6, 10, 14, 13, 9, 5}.

Пусть теперь для некоторого расположения шашек этот порядок иной, и пусть мы хотим это расположение перевести в «нормальное». Для этого нам хорошо бы научиться целенаправленно изменять порядок шашек вдоль пути П.

Ниже мы укажем прием, с помощью которого это можно делать.

Пусть шашки с номерами i , j и k стоят друг за другом вдоль пути П (рис.9, а). Передвигая все шашки «гуськом» вдоль П,

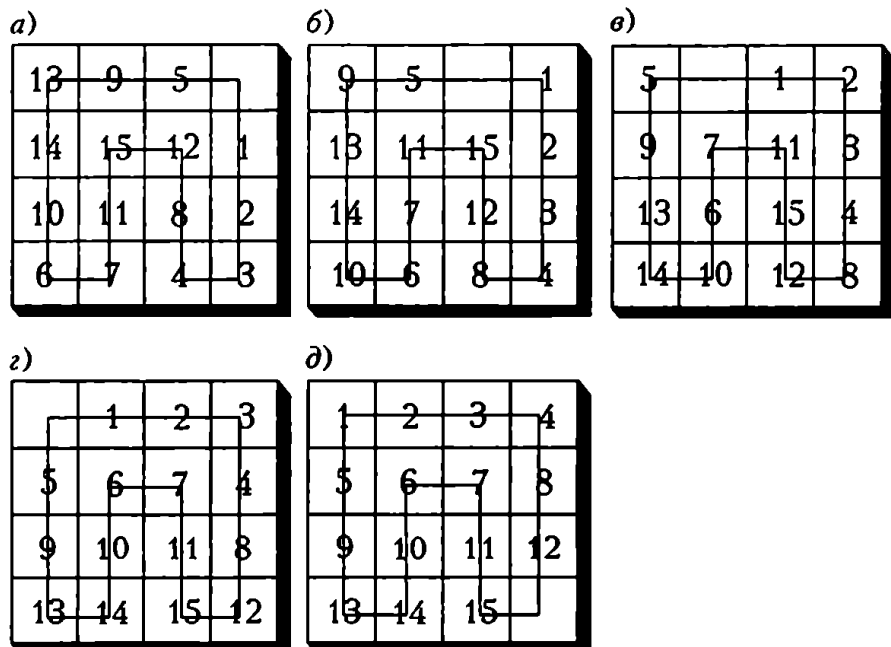


Рис. 8

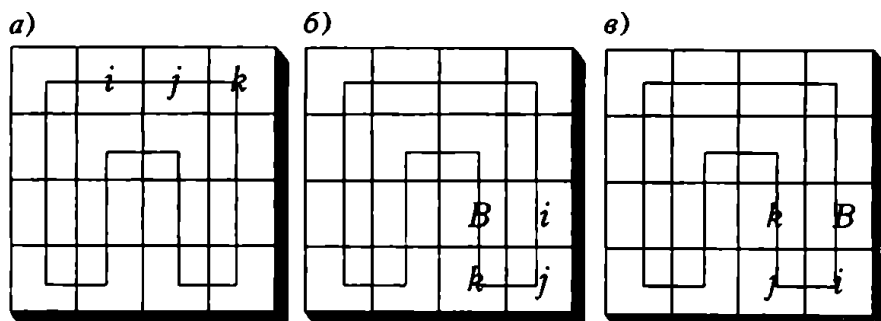


Рис. 9

легко добиться, чтобы шашки i, j, k и пустая клетка B расположились так, как на рисунке 9, б. Передвигая теперь шашку i на пустую клетку B , мы из порядка $\{..., i, j, k, ...\}$ получим порядок $\{..., j, k, i, ...\}$ – шашка с номером i «перепрыгнула» по часовой стрелке через две соседние: j и k .

Так же просто заставить любую шашку «прыгнуть» через две соседние против часовой стрелки. Например, чтобы на рисунке 9, а шашка k «перепрыгнула» через i и j , нужно сначала передвинуть шашки «гуськом» вдоль пути Π в положение, изображенное на рисунке 9, в, а затем передвинуть шашку k на пустое место B .

Итак, мы указали прием, с помощью которого можно заставить любую шашку «прыгать» через две шашки, стоящие на пути Π рядом с ней.

Все, кроме двух, – по местам!

С помощью этого приема легко перевести любое расположение шашек в одно из двух расположений, приведенных на рисунке 10, а, б.

Прежде всего поведем вдоль пути Π шашку 2 к шашке 1. Перепрыгивая против часовой стрелки через две шашки столько

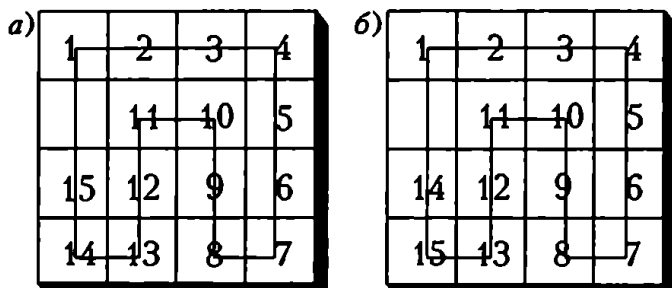


Рис. 10

раз, сколько понадобится, доведем ее либо до «своего» места (рядом с «единицей»), либо до соседнего (между ней и шашкой 1 останется некоторая шашка i), – в обоих случаях остановимся в тот момент, когда следующий прыжок был через шашку 1. Если между «двойкой» и «единицей» останется шашка i , заставим ее прыгнуть через две шашки (в том числе через «двойку») по часовой стрелке, – тогда «двойка» очутится рядом с «единицей» (причем с нужной стороны).

Затем таким же способом подведем «тройку» к «единице» и «двойке». Потом «четверку» – к «единице», «двойке» и «тройке». И так далее – вплоть до шашки 13.

Передвигая после этого все шашки «гуськом» вдоль P , придем к одному из двух расположений, изображенных на рисунке 10.

Хорошие и плохие расположения

Все расположения шашек разбились, таким образом, на два класса. Расположения 1-го класса можно перевести в такое, как на рисунке 10, *а*, расположения 2-го – в такое, как на рисунке 10, *б*.

Подумаем, почему отсюда следует утверждение, сделанное в разделе «Выйдет – не выйдет», и что еще отсюда следует.

Если некоторое расположение P можно перевести в расположение Q , то и обратно, Q можно перевести в P . Поэтому все расположения 1-го класса можно перевести друг в друга. Значит, соответствующие им перестановки – одинаковой четности, причем нечетные, так как расположению на рисунке 10, *а* соответствует нечетная перестановка

1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 15, 12, 9, 6, 7, 8, 13, 14

(тринадцать беспорядков).

Точно так же переводятся друг в друга и все расположения 2-го класса, причем им соответствуют четные перестановки.

Тем самым, «нормальное» расположение относится к 1-му классу, а расположение на рисунке 2 – ко 2-му. Назовем расположения 1-го класса *хорошими*, а 2-го класса – *плохими*.

Подведем итог доказанному.

Хорошие расположения – это те и только те, которым соответствуют нечетные перестановки, все их можно перевести в расположение, изображенное на рисунке 1.

Все остальные расположения плохие, им соответствуют четные перестановки, их нельзя перевести в расположение, изображенное на рисунке 1, и можно перевести в расположение, изображенное на рисунке 2.

Замечание. Соображения, приведенные в двух предыдущих разделах, фактически позволяют перевести любое хорошее расположение в «нормальное», однако вовсе не указывают, как добиться цели скорейшим путем. Последний вопрос мы оставляем в стороне и заниматься им не будем.

Вместо этого подумаем, каких расположений больше: хороших или плохих?

Перед зеркалом

Поставим коробочку с «нормальным» расположением шашек перед зеркалом (рис.11). Нарисуем на коробочке такую ломаную, чтобы ее зеркальное отражение выглядело так же, как на

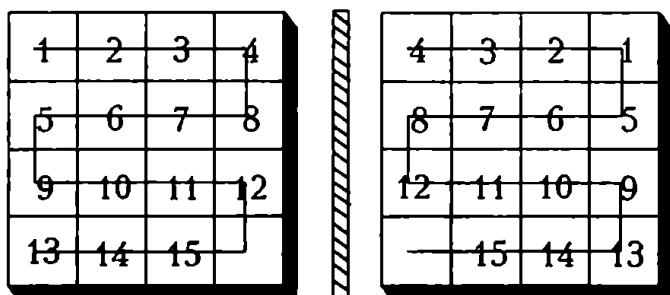


Рис.11

рисунке 3. Расположению R , которое мы увидим в зеркале, соответствует четная перестановка

4, 3, 2, 1, 5, 6, 7, 8, 12, 11, 10, 9, 13, 14, 15

(двенадцать беспорядков). Значит, расположение R плохое.

Пусть X – любое хорошее расположение. Докажем, что расположение Y , являющееся его зеркальным отражением, плохое. Последовательно перемещая шашки, переведем расположение X в «нормальное» *перед зеркалом*. Тогда в зеркале расположение Y перейдет в R . Расположение R плохое, значит, и Y плохое.

Так как, кроме того, каждое хорошее расположение отражается в зеркале по-своему, то тем самым доказано, что хороших расположений столько же, сколько плохих.

Одновременно доказано, что четных перестановок столько же, сколько нечетных.

Упражнения

1. В учебниках по высшей алгебре равенство числа четных перестановок числу нечетных устанавливается обычно при помощи понятия «транспозиция». Ниже мы рассматриваем перестановки не из 15, а из n

чисел: $1, \dots, n$. Четность и нечетность таких перестановок определяется так же, как в этой статье.

Определение. Если в некоторой перестановке поменять местами какие-нибудь два числа (не обязательно стоящие рядом), то получится новая перестановка. Это преобразование перестановки называется *транспозицией*.

а) От любой перестановки из чисел $1, \dots, n$ можно перейти к любой другой перестановке из тех же чисел при помощи нескольких транспозиций. Проверьте это.

б) Докажите, что всякая транспозиция меняет четность перестановки (четную перестановку переводит в нечетную, а нечетную – в четную).

в) Выведите отсюда, что при $n \geq 2$ четных перестановок из чисел $1, \dots, n$ столько же, сколько нечетных.

2. Докажите, что число всех перестановок из чисел $1, \dots, n$ равно произведению $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ (это произведение обозначается $n!$; читается: «эн-факториал»).

С ростом n число $n!$ возрастает необычайно быстро, например, $15! = 1307674368000$.

3. С помощью понятия «транспозиция» можно по-новому доказать неразрешимость головоломки Лойда.

Обозначим пустое место в коробочке числом 16. Тогда любому расположению шашек соответствует некоторая перестановка из чисел $1, \dots, 16$. Четность такой перестановки при каждом передвижении шашки на свободное место *меняется* (согласно упражнению 1,б)). Перестановки, соответствующие расположениям, изображенным на рисунках 1 и 2, по-прежнему имеют разную четность (снова согласно упражнению 1,б)). Значит, если бы от одного из этих расположений можно было бы перейти к другому, то при этом пришлось бы сделать *нечетное* число передвижений шашек. Это, однако, заведомо невозможно! Почему?

4. Докажите следующее утверждение, являющееся усилением упражнения 1, а): от любой перестановки из чисел $1, \dots, n$ можно перейти к любой другой перестановке из тех же чисел, меняя местами *только соседние числа*.

5. **Двухэтажная игра в 31.** В коробочку с размерами $2 \times 4 \times 4$ положим 31 кубик «в 2 этажа»: 16 кубиков внизу, 15 – наверху. Одно место в коробочке оставим пустым.

На кубиках напишем номера: $1, \dots, 31$, причем на каждом кубике напишем его номер дважды: на верхней и нижней грани.

Дно и крышку в коробочке сделаем прозрачными и напротив каждого кубика проделаем отверстия (такие, чтобы кубики через них не пролезали, но их легко было передвигать, не вынимая из коробочки). Теперь коробочку можно как угодно переворачивать: у нее больше нет «постоянного верха» и «постоянного низа». Кубики можно перемещать по каждому этажу и передвигать с этажа на этаж.

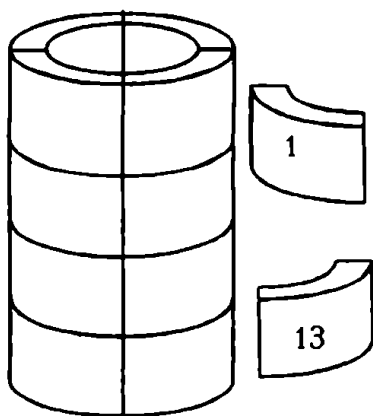


Рис. 12

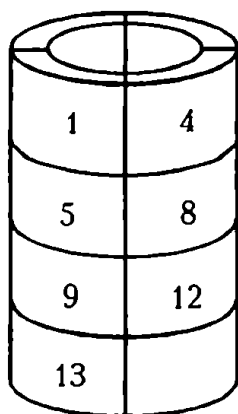


Рис. 13

Получилась «двухэтажная игра в 31». Разработайте теорию этой игры.

6. Игра в 15 на цилиндре. Полный цилиндр (рис. 12) разрежем на 16 одинаковых изогнутых шашек, проведя 4 вертикальных и 3 горизонтальных разреза. Одну шашку выбросим. Остальные перенумеруем числами 1, ..., 15 и поместим в специальную коробочку в форме полости между двумя цилиндрами. Во внешнем прозрачном цилиндре сделаем 16 отверстий – «игра в 15 на цилиндре» готова (рис. 13).

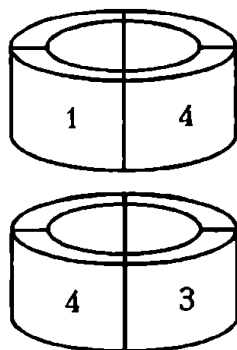


Рис. 14

Как и в обычной игре в 15, шашки разрешается передвигать по одной на свободное соседнее место;

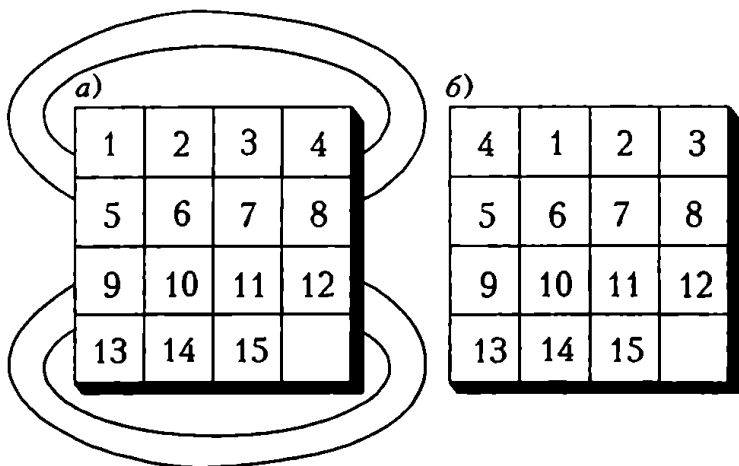


Рис. 15

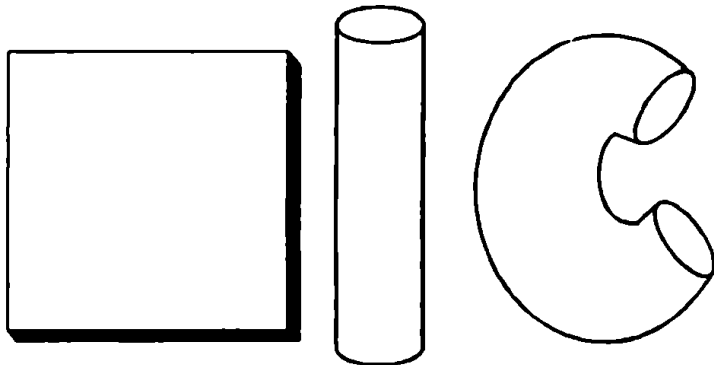


Рис. 16

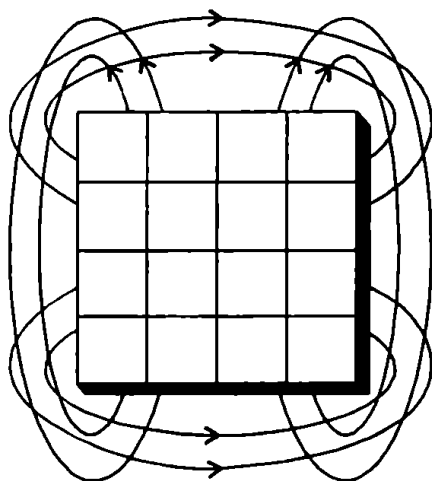


Рис. 17

кроме того, разрешается одновременно поворачивать 4 шашки (рис. 14), как обойму шарикоподшипника.

Можно ли любое расположение шашек перевести в любое другое?

Замечание. Не обязательно делать коробочку и шашки цилиндрическими. Можно использовать обычную игру в 15, разрешив дополнительно «циклические сдвиги строк» (рис. 15): например, «циклический сдвиг 1-й строки» переводит расположение, изображенное на рисунке 15, а, в расположение, изображенное на рисунке 15, б.

Последнее замечание поможет вам справиться с упражнением 6 и облегчит нам формулировку следующей задачи.

а)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

б)

2	1	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Рис. 18

7. Игра в 16 на торе. Чтобы сделать из прямоугольника цилиндр, нужно склеить противоположные вертикальные края. Если после этого склеить и противоположные горизонтальные края (рис.16), получится тор (поверхность бублика).

Чтобы изобразить «игру в 16 на торе», не обязательно вырезать шашки из бублика. Достаточно в обычной игре в 15 заполнить пустую клетку шашкой с номером 16 и разрешить «циклические сдвиги и строк и столбцов» (рис.17).

а) Можно ли таким сдвигами перевести расположение, изображенное на рисунке 18, а, в расположение, изображенное на рисунке 18,б?

б) Можно ли любое расположение перевести в любое другое?

в) Решите общую задачу об игре в n^2 на торе.

П. Певзнер

– Почему ты никогда не играешь? – спросил Малыш у Смока, когда они как-то раз сидели в «Оленьем роге».

– Неужели тебя не тянет к игорному столу?

– Тянет, – ответил Смок. – Но я знаю статистику проигрышей, а мне нужна верная прибыль.

Джек Лондон. «Смок Беллью»

Вы наверняка знаете игру орел – решка: игрок А выбирает какую-нибудь сторону монеты (например, О – орел), сообщает об этом В; В берет другую сторону; после этого подбрасывается монета ... Ни у кого не возникает сомнений в том, что игра орел – решка – честный способ решения спорных вопросов.

В 1974 году Мартин Гарднер в статье «Парадокс, возникающий из-за нетранзитивных отношений» познакомил читателей журнала *Scientific American* с «такой же честной» игрой, которую он назвал *лучшим пари для простаков*. Эта игра сходна с игрой орел – решка, только игроки задумывают слово не из одной буквы, как в игре орел – решка, а из нескольких букв. Например, игрок А задумывает слово ОРО и сообщает об этом В; В в свою очередь задумывает какое-нибудь слово такой же длины, например ООР. Разумеется, выбранные слова не должны совпадать, поэтому А и сообщает о своем выборе В. После этого игроки начинают подбрасывать монету, записывая результат каждого бросания. Например, после 6 бросаний с исходами: решка, орел, решка, решка, орел, решка, будет записана последовательность РОРРОР. Игра прекращается в тот момент, когда в записываемой последовательности букв на конце возникнет слово, выбранное А или В; в первом случае победа присуждается А, во втором – победа присуждается В. Таким образом, побеждает тот, чье слово появится раньше. Например, если на седьмом броске монеты выпадет О, то победит А, так как будет написано РОРР**ОРО** (курсивными буквами выделено возникшее в последовательности слово, выбранное игроком А); если на седьмом

Опубликовано в «Кванте» №5 за 1987 г.

броске выпадет Р, то игру следует продолжать (так как в ROPROP не содержится ни ОР, ни ОР); при этом в случае, когда на 8-м, 9-м и 19-м бросках выпадут О, О, Р, победит В — ведь будет написано ROPROP**ООР**.

Если вы играете в игру орел–решка, то выбор орла или решки — дело вкуса, так как слова О и Р равноправны. На первый взгляд кажется, что и в «лучшем пари для простаков» все слова равноправны. В 1969 году создатель этой игры Вальтер Пенней обнаружил неравноправность слов. Большинство математиков, узнавших правила игры, в первый момент отказываются в это поверить. Тем не менее это так — для многих пар слов выбор одного из них (самого «сильного») обеспечивает преимущество игроку, осуществившему этот выбор: этот игрок выигрывает чаще, чем его противник, игра оказывается нечестной. Более того, существует формула, позволяющая количественно выразить это преимущество.

С этой формулой связана почти детективная история. Гарднер привел ее в своей статье, сославшись на известного английского математика Джона Конвея, сообщившего о ней в письме (без доказательства). Гарднер признался, что у него нет идей о том, как ее доказывать, и «предположил», что она получена с помощью магии, как и многие другие результаты Конвея.

Соображения Конвея об этой задаче до сих пор не напечатаны, но в конце 70 — начале 80-х годов его формула была независимо и разными способами доказана сразу несколькими математиками. Однако все эти работы использовали довольно серьезный математический аппарат, и формула появлялась в них, как фокус: после деления одних трехэтажных выражений на другие. Оказывается, существует элементарное доказательство формулы Конвея, эскиз которого приводится в заключение этой статьи. Более того, сейчас имеется и простой алгоритм для нахождения лучшего ответа для второго игрока, хотя первоначальный замечательный алгоритм (для слов из трех букв), предложенные в статье Гарднера и принадлежащей его коллеге Б. Волку, по туманности и запутанности не уступает алхимическим рецептам получения философского камня.

Но мы отвлеклись. Осталось невыясненным, почему слова в нашей игре могут быть неравноправными.

Какое слово сильнее?

Рассмотрим конкретный пример. Представим себе, что в игре с двухбуквенными словами игрок А поставил на комбинацию «решка–решка», а В — на комбинацию «орел–решка». Тогда А

выиграет, только если при первых двух бросаниях выпадет РР: если выпадет ОР, сразу же выигрывает В, если выпадет РО или ОО, то В тоже выиграет, хотя и не сразу; именно, в последних двух случаях В выиграет, хотя только при очередном бросании выпадет Р (а это когда-нибудь и произойдет – при честном бросании монета не может всегда выпадать орлом). Таким образом, из четырех равновозможных случаев (РР, ОР, РО, ОО) игрок А выигрывает в одном (РР), т.е. шансы на выигрыш у А в три раза хуже, чем у В.

По поводу игры с двухбуквенными словами стоит заметить, что умный игрок А не будет выбирать слово РР (равно как и слово ОО). Он выберет слово ОР (или РО), а тогда его шансы на выигрыш и проигрыш одинаковы, если, конечно, В не выберет одно из «слабых» слов ОО или РР (проверьте!).

Но если перейти к трехбуквенным словам, картина принципиально меняется. Именно: *какое бы трехбуквенное слово ни выбрал игрок А, его соперник В может подобрать другое слово, которое ему дает больше шансов на выигрыш.*

– Как же так, – спросит читатель, – почему бы игроку А не выбрать «самое сильное» слово, ведь он выбирает первым? – А дело как раз в том, что нет самого сильного слова. Ситуацию наглядно поясняет рисунок 1. На нем выписаны все трехбуквенные слова, составленные из букв О, Р, а стрелки между двумя словами указывают, какое из этих двух слов сильнее (т.е. дает больше шансов на выигрыш).

Посмотрите на рисунок 1: из каждого слова выходит хотя бы одна стрелка; значит, для любого слова есть более сильное, т.е. *нет самого сильного слова.* Обратите внимание на цикл из

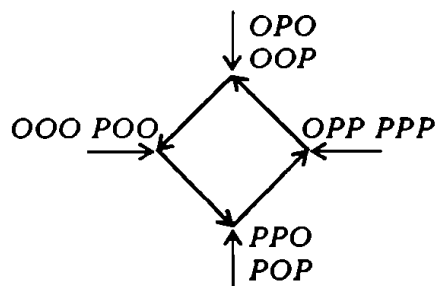


Рис. 1

слов PPO, OPP, OOP, POO и PPO. Мы видим: из того, что слово X сильнее Y, а Y сильнее Z, вовсе не следует, что X будет сильнее Z (ситуация, которая часто возникает в спортивных соревнованиях). Математики говорят, что отношение «быть сильнее» *нетранзитивно* (отсюда и название упомянутой статьи Гарднера).

Имея в своем распоряжении рисунок 1, игрок В, руководствуясь стрелками, всегда может в ответ на выбор А выбрать для себя более сильное слов. И тогда он будет чаще выигрывать, чем его противник.

Но насколько чаще? и откуда следует, что рисунок 1 правильно отражает реальную ситуацию? На эти вопросы нам предстоит ответить.

Оценим шансы на выигрыш

Вернемся к двухбуквенной игре. Будем, как и раньше, предполагать, что наивный игрок А выбрал слово $A = 11$, а его хитрый противник В поставил теперь слово $B = 01$ (вместо букв О, Р мы теперь пишем цифры 0, 1, а игрока и выбранное им слово обозначаем одной буквой). Последовательности бросаний монеты, на которых выигрывает А, будем называть *А-сериями* (аналогично определяются *В-серии*). Например, 11 — *А-серия*, а 01, 001, 0001, 101, 1001, 10001 — *В-серии*.

Таблица 1

$\begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \end{matrix}$	00	01	10	11
00	—	$1/2$	$1/4$	$1/2$
01	$1/2$	—	$1/2$	$3/4$
10	$3/4$	$1/2$	—	$1/2$
11	$1/2$	$1/4$	$1/2$	—

Таблица 2

$\begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \end{matrix}$	00	01	10	11
00	—	1	$1/3$	1
01	1	—	1	3
10	3	1	—	1
11	1	$1/3$	1	—

Очевидно, что 11 — единственная *А-серия* (т.е. А выигрывает в том и только в том случае, когда первые два броска монеты дают 1). Далее, не менее очевидно, что *В-серии* имеют вид $0...1$, либо $10...1$ (на месте многоточия может стоять любое число нулей).

Итак, 11 — единственная *А-серия*. Давайте попытаемся определить вероятность¹ выигрыша А, т.е. долю случаев, в которых после двух бросаний появляется последовательность 11.

В результате одного бросания возможны два исхода (0 и 1) — вероятность каждого исхода равна $1/2$. В результате двух бросаний возможны четыре исхода, вероятность каждого равна $1/4$, следовательно, вероятность выигрыша А равна $1/4$ (т.е. А выигрывает в $1/4$ всех случаев):

$$P(A, B) = P(11) = 1/4$$

¹ Мы не определяем здесь понятия *вероятности* — в нашей статье слова «вероятность» и «доля случаев» — синонимы. Читателей, желающих ознакомиться с этими понятиями, мы отсылаем к книге: А.П. Колмогоров, И.Г. Журбенко, А.В. Прохоров. «Введение в теорию вероятностей». — М.: Наука, 1978.

(через $P(A, B)$ обозначена вероятность выигрыша A у B , через $P(11)$ — вероятность серии 11).

В результате n бросаний могут получиться 2^n (равновозможных) исходов; следовательно, вероятность каждой серии длины n равна $1/2^n$. Для того чтобы посчитать вероятность $P(B, A; n)$ выигрыша B за n шагов или менее, необходимо найти вероятность каждой B -серии длины $\leq n$ и просуммировать эти вероятности. Получим

$$\begin{aligned} P(B, A; n) &= P(01) + P(001) + \dots + P(\underbrace{0\dots 01}_{n-1}) + P(101) + \\ &\quad + P(1001) + \dots + P(\underbrace{10\dots 01}_{n-2}) = \\ &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Следовательно, B выигрывает у A за n шагов или менее с вероятностью, которая при больших n очень близка к $3/4$; вероятность того, что после n бросаний еще никто не выиграл, равна $1/2^{n-1}$ (т.е. ничтожно мала при больших n). Переходя к пределу в равенстве $P(B, A; n) = 3/4 - 1/2^{n-1}$ при $n \rightarrow \infty$, можно считать, что мы получим вероятность $P(B, A)$ выигрыша B у A при «неограниченном продолжении» игры:

$$P(B, A) = 3/4.$$

Вероятность выигрышей для произвольных двухбуквенных слов A и B показана в таблице 1 (число, стоящее на пересечении строки B и столбца A , дает вероятность выигрыша B у A). Эту таблицу несложно составить.

Оценим преимущество

По таблице 1 строится таблица 2, дающая *преимущество B над A*

$$d(B, A) = \frac{P(B, A)}{P(A, B)}. \quad (1)$$

В таблице 3 приводятся преимущества для всех трехбуквенных слов. Пользуясь этой таблицей, мы и построили «нетранзитивный» граф, показанный на рисунке 1.

Но как найдены числа в таблице 3? К сожалению, формула (1) малоприспособна для вычисления при длине слов $l \geq 3$. Уже для трехбуквенных слов A, B найти $P(A, B)$ непосредственно — весьма неприятная задача, а для больших l — безнадежная. Но тут нас выручает «магическая»

$B \backslash A$	000	001	010	011	100	101	110	111
000	–	1	2/3	2/3	1/7	5/7	3/7	1
001	1	–	②	②	1/3	5/3	1	7/3
010	3/2	1/2	–	1	1	1	3/5	7/5
011	3/2	1/2	1	–	1	1	③	⑦
100	⑦	③	1	1	–	1	1/2	3/2
101	7/5	3/5	1	1	1	–	1/2	3/2
110	7/3	1	5/3	1/3	②	②	–	1
111	1	3/7	5/7	1/7	2/3	2/3	1	–

Формула Конвея

Формула Конвея позволяет найти $d(B, A)$ при произвольных B и A , не вычисляя никаких вероятностей. Для того, чтобы объяснить эту формулу, нам нужно определить многочлен Конвея $K_{XY}(t)$ слов X, Y .

На рисунке 2 слово Y шесть раз записано под словом X , причем каждое новое слово Y сдвигается на одну позицию вправо по сравнению с предыдущим (для n -буквенных слов слово Y будет записано под X n раз). Каждому сдвигу слова Y поставим в соответствие число 1 или 0 в зависимости от того, совпадают ли все буквы, находящиеся друг под другом в общих позициях X и Y , или нет. Полученное таким образом слово (длины n) из нулей и единиц называется *корреляцией* X и Y и обозначается $\langle XY \rangle$. Так, например, для 2-го сдвига Y общие позиции совпадают, поэтому во второй строке на рисунке 2 записана единица – вторая

$X = 100100$	Корр. XY	начало X до Y
$Y = 001001$	0	
001001	1	1
001001	0	
001001	0	
001001	1	1001
001001	1	10010

Рис. 2

буква слова $\langle XY \rangle$. В нашем примере

$$\langle XY \rangle = 010011.$$

В общем случае, пусть $\langle XY \rangle = e_1 \dots e_n$ (где e_i – нули или единицы). Тогда *многочлен Конвея слов X, Y* определяется так:

$$K_{XY}(t) = e_1 + e_2 t + \dots + e_n t^{n-1}.$$

В нашем случае $K_{XY}(t) = t + t^4 + t^5$.

Очень странное определение! Во всяком случае совершенно непонятно, как до него можно было додуматься. Но оно работает – на нем основана формулой Конвея:

$$d(B, A) = \frac{K_{AA}(1/2) - K_{AB}(1/2)}{K_{BB}(1/2) - K_{BA}(1/2)}. \quad (*)$$

Можно понять Гарднера, когда он приписывает вывод этой необычной формулы «потусторонним» силам: ну магия, и только!

Не останавливаясь пока на выводе формулы (*), поясним, как ею пользоваться. Сначала нужно найти корреляции $\langle AA \rangle$, $\langle AB \rangle$, $\langle BB \rangle$, $\langle BA \rangle$. Затем по ним написать четыре *многочлена Конвея*, в каждый из них подставить $t = 1/2$ и, наконец, выполнить действия, указанные в правой части формулы (*). Конкретный пример разобран на рисунке 3.

$X = 100100$	$Y = 001001$
$XY = 010011$	
$K_{XY}(t) = t + t^4 + t^5 K_{XY}(1/2) = 19/32$	
$XY\text{-ростки: } 1, 0100, 01001$	
$YX = 001001$	
$K_{YX}(t) = t^2 + t^5, K_{YX}(1/2) = 9/32$	
$YX\text{-ростки: } 00, 00100$	
$XX = 100100$	
$K_{XX}(t) = 1 + t^3, K_{XX}(1/2) = 9/8$	
$XX\text{-ростки: } \emptyset, 100$	
$YY = 100100$	
$K_{YY}(t) = 1 + t^3, K_{YY}(1/2) = 9/8$	
$YY\text{-ростки: } \emptyset, 001$	
$d(Y, X) = \frac{K_{XX}(1/2) - K_{XY}(1/2)}{K_{YY}(1/2) - K_{YX}(1/2)} = \frac{9/8 - 19/32}{9/8 - 9/32} = 17/27$	

Рис. 3

Имея таблицу преимущества и зная загаданное игроком A слово A , игрок B легко найдет оптимальный выбор ответа B — для этого ему нужно лишь разыскать максимальное значение в столбце под словом A . Например, для первого столбца $A = 000$ (табл.3), $d_{\max} = 7$, и нужно взять $B = 100$. Это обеспечивает семикратное преимущество. В таблице 3 максимальные элементы в столбцах обведены в кружочки — все они не меньше 2; следовательно, при любом выборе A , B может ответить так, что у B будет по крайней мере 2-кратное преимущество в игре.

Как выбрать ответное слово?

Мы уже объяснили, как это сделать. Но при этом предположили, что предварительно составлена таблица преимуществ. Нельзя ли, зная слово A , непосредственно найти оптимальный ответ B , не вычисляя всей таблицы (или целого ее столбца, длина которого равна 2^l)?

Оказывается — можно. Расскажем, как это делается.

Пусть игрок A выбрал слово $A = a_1 a_2 \dots a_l$ ($l > 2$, a_i равно 0 или 1). Тогда игроку B следует выбрать слово $B = b_1 b_2 \dots b_l$,

$$b_2 = a_1, b_3 = a_2, \dots, b_l = a_{l-1}$$

(пока первая буква b_1 слова B не фиксируется).

В этом случае при сдвиге слова A на одну позицию относительно B

$$B = b_1 b_2 b_3 \dots b_l$$

$$A = a_1 a_2 \dots a_{l-1} a_l$$

все буквы, находящиеся друг под другом, совпадают, поэтому первый член в многочлене $K_{BA}(t)$ при $t = 1/2$ равен $1/2$ — мы тем самым стремимся максимизировать значение $K_{BA}(1/2)$ в формуле Конвея. Вообще предлагаемый выбор оптимального ответа основан на (довольно тонком) анализе формулы Конвея, который мы проводить не будем.

Осталось объяснить, как выбирается b_1 . Обозначим $A' = a_1 a_2 \dots a_{l-1}$. Пусть r — минимальное число, при котором после сдвига A' на r позиций происходит совпадение написанных друг под другом букв:

$$A' = a_1 \dots a_r a_{r+1} \dots a_{l-1}$$

$$A' = a_1 \dots a_{l-r-1} a_{l-r} \dots a_{l-1}$$

(т. е. $a_1 = a_{r+1}$, $a_2 = a_{r+2}$, ..., $a_{l-r-1} = a_{l-1}$). Так вот, букву b_1 следует выбирать по правилу $b_1 \neq a_r$ (например, при $A = 100100$ имеем $r = 3$, и следует брать $B = 110010$).

Американские математики Гуибас и Одлжко доказали в 1981 году, что такой выбор слова B оптимален. Более того, ими доказано, что число

$$\min_A \max_B d(B, A)$$

(т. е. преимущество B над A при самом лучшем для A выборе слова A) стремление к 2 при возрастании I . Другими словами, при указанном выборе ответа второй игрок в среднем выигрывает в два раза чаще самого хитрого первого игрока.

Нам осталось лишь привести обещанное доказательство.

Эскиз доказательства формулы Конвея

Даны слова A, B длины $l > 2$. Через S_A обозначим (бесконечное) множество *укороченных A-серий*, т.е. всех слов, получаемых из A -серий отбрасыванием их последних l букв. Аналогично определим S_B . Пусть m_1, \dots, m_k – номера разрядов слова $\langle XY \rangle$, где стоит 1 (напомним, что $\langle XY \rangle$ – это корреляция слов X и Y); через H_{XY} обозначим множество из k слов, составленных соответственно из первых m_1, m_2, \dots, m_k букв слова X . Через $M * N$, где M и N любые множества слов, обозначим *слияние* M и N , т.е. новое множество, составленное из всех слов вида XY (слова X и Y записаны подряд в одно слово, $X \in M, Y \in N$). Напомним, что $P(X)$ обозначает вероятность появления слова X в процессе игры со словами A, B , а $P(A, B)$ – вероятность выигрыша A у B . Формула Конвея вытекает из следующих трех утверждений (доказательство каждого из них – задача для читателя).

1. Для любых слов X, Y длины l

$$K_{XY} \left(\frac{1}{2} \right) = \sum_{S \in H_{XY}} P(S).$$

2*. Множество T всех слов, не содержащих ни A , ни B (т.е. последовательностей, на которых ни один из игроков еще не выиграл), можно представить в виде

$$T_1 = (S_A * H_{AB}) \cup (S_B * H_{BB});$$

$$T_2 = (S_B * H_{BA}) \cup (S_A * H_{AA}),$$

причем $T_1 = T_2 = T$ (обе эти формулы задают одно множество T).

3. Суммы вероятностей слов из T_1 и T_2 выражаются формулами

$$\sum_{S \in T_1} P(S) = 2^l \left[P(A, B) K_{AB} \left(\frac{1}{2} \right) + P(B, A) K_{BB} \left(\frac{1}{2} \right) \right],$$

$$\sum_{S \in T_2} P(S) = 2^l \left[P(B, A) K_{BA} \left(\frac{1}{2} \right) + P(A, B) K_{AA} \left(\frac{1}{2} \right) \right].$$

Чтобы доказать формулу Конвея, остается только приравнять правые части последних двух равенств (это можно, ибо $T_1 = T_2$) и воспользоваться определением $d(B, A) = P(B, A)/P(A, B)$.

Для читателя, вошедшего во вкус, предлагаем

Решенные и нерешенные задачи

1. Пусть подбрасывается не монета, а игральный кубик, и загадывается слово из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6. Докажите, что тогда преимущество второго игрока над первым выражается формулой

$$d(B, A) = \frac{K_{AA}(1/6) - K_{AB}(1/6)}{K_{BB}(1/6) - K_{BA}(1/6)}.$$

2. Неизвестно, как должен играть А, для того чтобы его проигрыш был минимальным (в игре с монетой) при $l \geq 3$.

3. Не исследован случай, когда А загадывает слово из n букв, а В – из m букв ($m > n$). Каковы оптимальные стратегии в этом случае?

4. Неизвестны стратегии ни одного из игроков А, В, С для игры трех лиц. Попробуйте понять, как должен играть С для того, чтобы максимизировать выигрыш, при фиксированных выборах А и В.²

5. В «лучшем пари простаков» 0 и 1 равноправны, т.е. выпадают с равной вероятностью при каждом бросании монеты: $P(0) = P(1) = 1/2$. Представьте себе, что монета «фальшивая», т.е. при ее подбрасывании 0 выпадает чаще, чем 1: $P(0) > 1/2$. Понятно, что если $P(0)$ близко к 1 (например, $P(0) = 0,999$), то загадывая слово 00000 из пяти букв, игрок А выигрывает с вероятностью не меньшей, чем $0,999^5 > 1/2$. Возникает задача: при каких значениях $P(0)$ игрок В продолжает выигрывать в игре с задумыванием слова из l букв? Даже при $l = 3$ ответ на этот вопрос неизвестен.

Гипотеза. При любом значении $P(0)$ у В существует выигрышная стратегия при достаточно большой длине загадываемых слов.

² В игре трех лиц можно рассмотреть вариант, когда первые два могут организовывать коалиции, т.е. объединяться для борьбы с С.

Е. Глушанков, П. Певзнер

Нельзя ли без полного перебора?

Стремительное развитие в XX веке производства, экономики и транспорта поставило перед математикой новые проблемы. Как управлять современным предприятием, как спланировать большой комплекс работ, как составить удобное расписание движения поездов – со всеми этими вопросами инженеры стали обращаться к математикам. Однако методы классической математики, предназначенные, в основном, для решения задач физики и механики, не могли дать ответа на такие вопросы. Это привело к появлению новых математических дисциплин – теории игр, теории графов, теории кодирования и многих других, объединяемых сейчас названием «дискретная математика».

Первая работа по дискретной математике (она принадлежит Леонарду Эйлеру), появившаяся еще в 1736 году, была посвящена известной головоломке о кенигсбергских мостах: можно ли



совершить прогулку по Кенигсбергу (план города изображен на рисунке) таким образом, чтобы выйдя из дома, вернуться обратно, пройдя по каждому мосту ровно один раз? Долгое время дискретная математика занималась почти исключительно головоломками, и поэтому находилась у серьезных математиков на

положении Золушки. Однако уже XIX веке дискретные методы применялись при изучении электрических цепей и молекулярных схем в химии.

Опубликовано в «Кванте» №9 за 1980 г.

Настоящий расцвет дискретной математики наблюдается в последние два-три десятилетия. Физика, химия, программирование, экономика, генетика, социология, лингвистика, антропология – это лишь часть длинного списка наук, в которых применяются методы дискретной математики.

В последнее время всеобщее внимание привлекли некоторые классические задачи дискретной математики, которые вот уже более ста лет ждут своего решения. Все эти задачи характеризуются тем, что если дан «кандидат в ответы», то очень легко проверить, действительно ли он является ответом, но очень трудно такой ответ найти; фактически приходится перебирать по очереди все возможные варианты.

С одной такой задачей занимающиеся математикой сталкиваются едва ли не каждый день. Это задача поиска доказательства данной теоремы. В самом деле, если доказательство дано, то проверить его правильность в принципе нетрудно. Нужно лишь убедиться в том, что каждый шаг сделан в соответствии с правилами логики, а промежуточные утверждения следуют из аксиом и известных теорем. Но как это доказательство найти? Неужели перебирать все возможные рассуждения, начиная с аксиом? Если бы кто-нибудь мог объяснить, как он «догадывается», решая задачи, может быть, это помогло бы математикам научить машину делать то же самое.

А вот более простой пример: *задача о разбиении*. Пусть $A = \{s_1, \dots, s_N\}$ – конечное множество, содержащее натуральные числа. Требуется разбить множество A на два подмножества I и J ($I \cap J = \emptyset, I \cup J = A$) так, чтобы сумма элементов из I равнялась сумме элементов из J . Как и в предыдущем примере, для данного разбиения множества A на множества I и J очень легко проверить, равны ли соответствующие суммы. Но как найти искомое разбиение? К сожалению, наука не может пока предложить ничего существенно лучшего, чем перебор всех 2^N вариантов. Но уже при $N = 100$ современной вычислительной машине понадобятся миллиарды лет для проведения такого перебора.

В настоящее время распространено мнение, что для некоторых задач (например, задачи о разбиении) ничего существенно лучшего, чем полный перебор, предложить невозможно. Именно поэтому каждый пример эффективного алгоритма в той ситуации, где раньше приходилось довольствоваться перебором, представляет большой интерес для науки, даже если сама ситуация «игрушечная». Об одном таком примере и пойдет речь в этой статье.

В начале 50-х годов выдающийся американский математик и инженер, создатель теории информации Клод Шеннон предложил схему перебора вариантов для шахматной программы.

Почти все современные шахматные программы являются, по существу, различными реализациями этой схемы. Однако число вариантов, перебираемых программами, играющими по алгоритму Шеннона, оказалось столь велико, что ни памяти, ни быстродействия современных ЭВМ недостаточно для их реализации.

Шеннон пытался применить свои методы к некоторым другим играм. Он рассмотрел игру на графах, которая называется теперь *переключательной игрой Шеннона* (сокращенно – ПИШ).

В настоящее время предложено несколько подходов к программированию игр. Один из методов основан на переборе с отсечением бесперспективных (с некоторой точки зрения) вариантов¹. Другой метод (на его основе в середине 60-х годов А. Леман предложил «идеального игрока» в ПИШ), связанный с полным отказом от перебора вариантов, опирается на некоторые результаты дискретной математики.

О том, как можно играть в ПИШ, не перебирая вариантов, мы и расскажем ниже.

Бридж-ит

В конце 50-х годов американец Гейл придумал игру бридж-ит. Стандартное поле для игры бридж-ит показано на рисунке 1. Один игрок соединяет синим карандашом синие точки, другой – красным карандашом красные (на рисунке красные точки обозначены светлыми точками, а синие точки – черными точками). «Ходят» (т.е. проводят отрезки) игроки по очереди. Выигрывает тот, кто первым построит ломаную, соединяющую две противоположные стороны своего цвета (на рисунке 2 партия закончена победой красных).

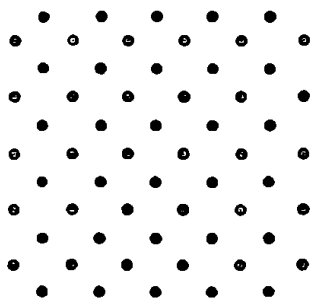


Рис. 1

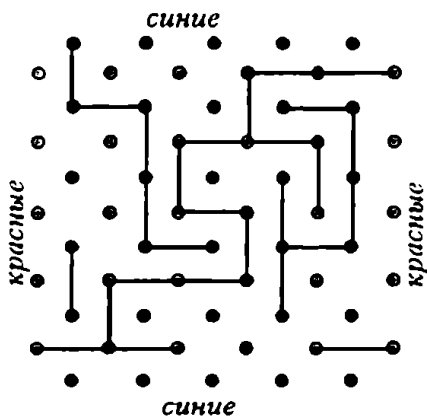


Рис. 2

¹ См. статью: Р.Гутер, М.Донской. «Машина играет в шахматы» («Квант», 1974, №11).

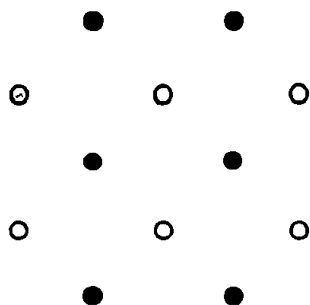
Попробуйте, поиграв в бридж-ит на маленьких полях (рис.3), понять, у какого игрока — преимущество в этой игре, а затем попытайтесь разработать выигрышную стратегию для этого игрока.

Задача 1. Докажите, что в игре бридж-ит «ничьих» не бывает.

Если в игре не бывает «ничьих», то один из игроков имеет выигрышную стратегию. Действительно, пусть, например, игрок *A* не имеет выигрышной стратегии, т.е. на любой его ход у игрока *B* существует такой ответ, что игра не кончится победой *A*. Поскольку предположено, что в рассматриваемой игре нет «ничьих», партия кончится победой игрока *B*, т.е. у *B* есть такая последовательность ходов, что, как бы ни играл *A*, все равно выиграет *B*. Таким образом, у игрока *B* существует выигрышная стратегия.

Только что приведенное рассуждение есть чистое доказательство существования: доказывается, что стратегия существует, но как ее найти — ни слова. А ведь это и есть самый интересный вопрос.

Рис. 3



ПИШ

Чтобы описать выигрышную стратегию для игры бридж-ит, перейдем от бридж-ит к ПИШ. Для этого изменим немного правила игры. На рисунке 4 показаны все возможные ходы «синего» и «красного» игроков. Мы будем называть такие рисунки «графами возможных ходов». Если вы уже поиграли в бридж-ит, то наверное поняли, что игрокам бессмысленно проводить отрезки, обозначенные на рисунке 4 пунктиром. Поэтому давайте вообще не будем их

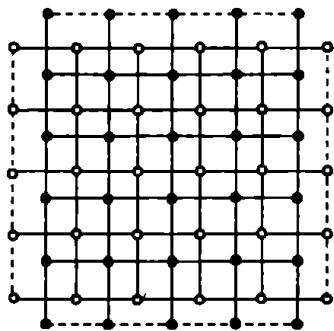


Рис. 4

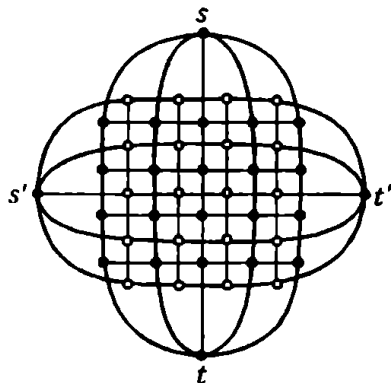


Рис. 5

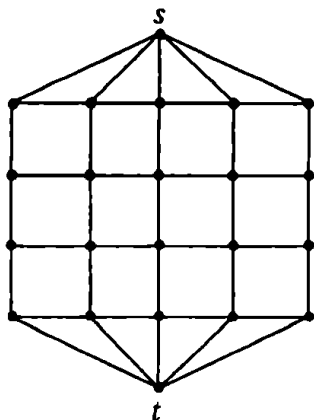


Рис. 6

рассматривать и стянем все верхние точки в одну; то же самое сделаем с левыми, правыми и нижними точками (рис.5). Теперь цель «синего» игрока — соединить путем из синих ребер вершины s и t , а цель «красного» — соединить красным путем вершины s' и t' .

Заметьте, что каждый красный отрезок пересекает ровно один синий. Поэтому, если «красный» игрок делает ход, то это, по существу, означает, что он делает невозможным один (и только один) ход «синего» игрока, т.е. «крас-

ный» игрок своим ходом как бы вычеркивает ребро синего графа. Но вместо того чтобы вычеркивать синее ребро, можно просто закрасить его красным цветом. Теперь мы можем вообще удалить красный граф из рисунка 5 и считать, что игра проходит так:

Два игрока по очереди красят ребра графа, у которого выделены вершины s и t : один — синим цветом, другой — красным (рис.6). Цель «синего» игрока — соединить выделенные вершины путем² из синих ребер, а цель «красного» игрока — помешать ему (что это значит, мы уточним позднее).

Это и есть *переключательная игра Шеннона (ПИШ)*. Только Шеннон предложил ее в более общей постановке: во-первых, играть можно на любом графе и, во-вторых, на данном графе можно выделить любую пару вершин.

Каждый граф с двумя выделенными вершинами задает некоторый *вариант* ПИШ. Первый ход в каждом варианте может делать любой игрок — как «синий», так и «красный». Поскольку «синий» игрок соединяет вершины, его уместно назвать *Соединяющим* или *С-игроком*. А красного игрока мы назовем *Режущим* или *Р-игроком*.

Совершенно очевидно, что «ничьих» в ПИШ не бывает — С либо соединит выделенные вершины, либо нет. Поэтому один из игроков в ПИШ имеет выигрышную стратегию. Но какой? Как найти эту стратегию?

² Напомним, что *графом* называется конечное множество точек (вершин графа) и соединяющих их отрезков (*ребер* графа). *Путь* — это линия на графе, не проходящая ни по какому ребру более одного раза.

Классификация вариантов ПИШ

Заметим, что если игрок, играющий вторым, имеет выигрышную стратегию, то он имеет ее и в том случае, когда играет первым. Действительно, играя первым, он закрасит своим цветом любое ребро, а потом будет отвечать на ходы противника так, как он делал бы это, играя вторым. Если на каком-то шаге надо будет покрасить ребро, которое он покрасил раньше, то он покрасит произвольное ребро. Так он и будет играть, имея одно «лишнее» ребро своего цвета, которое, конечно же, не может помешать ему выиграть.

Таким образом, с точки зрения возможности выиграть для каждого варианта ПИШ возможен один и только один из следующих трех случаев:

1. соединяющий имеет выигрышную стратегию, независимо от того, играет он первым или вторым;

2. режущий имеет выигрышную стратегию, независимо от того, играет он первым или вторым;

3. выигрышную стратегию имеет игрок, делающий первый ход.

Варианты ПИШ первой группы мы назовем *С-играми*, второй — *Р-играми*, третьей — *Н-играми*.

На рисунках 7, а — в изображены графы, дающие *С-игру*, *Р-игру* и *Н-игру* соответственно.

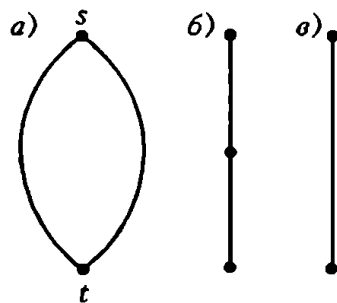


Рис. 7

Задача 2. Докажите, что бридж-ит является *Н-игрой*.

Немного теории

Давайте на некоторое время отвлечемся от игр и дадим несколько определений из теории графов, которые понадобятся в дальнейшем³.

Граф *G* называется *связным*, если в нем между любыми двумя вершинами существует путь. Несвязный граф представляет собой набор нескольких связных графов, каждый из которых называется его *компонентой*. Путь, в котором начальная и конечная вершины совпадают, называется *циклом*. Если в связном графе есть цикл, то при удалении любого ребра из цикла граф остается связным. Связный граф без циклов называется *деревом*. Примеры деревьев приведены на рисунке 8.

³ Подробнее о графах рассказано, например, в книге Л. Ю. Березиной «Графы и их применение» (М.: «Просвещение», 1979).

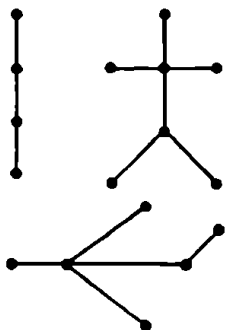


Рис. 8

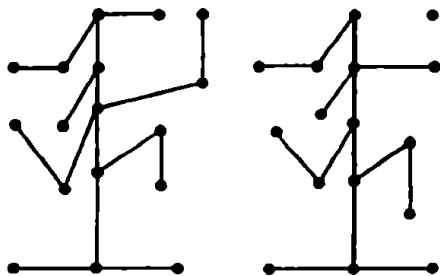


Рис. 9

Легко видеть, что удаление любого ребра из дерева приводит к графу ровно с двумя компонентами, причем концы удаленного ребра лежат в разных компонентах (рис.9). Ребро графа с

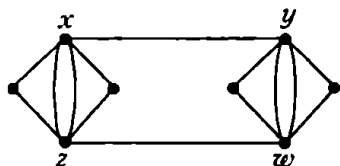


Рис. 10

концами x и y будем обозначать $[x, y]$. Ту компоненту, которая образуется при выбрасывании ребра $[x, y]$ из дерева A и содержит вершину x , обозначим через $A(x)$, а ту, которая содержит вершину y , — через $A(y)$.

Лемма о двух деревьях. Пусть A и B — два дерева на одном и том же множестве вершин и $[x, y]$ — ребро дерева A . Тогда в дереве B существует ребро b , один конец которого лежит в $A(x)$, а другой — в $A(y)$ (рис.10).

Новые правила игры

Чтобы научиться играть в ПИШ, мы опять немного изменим поле и правила игры. Для этого введем понятие стягивания графа.

Давайте будем укорачивать ребро $[x, y]$ в графе G до тех пор, пока его концы не сольются в одну вершину z (рис.11). Из вершины z выходят теперь все те ребра, которые раньше выходили из вершин x и y (кроме самого ребра $[x, y]$). Эта операция называется *стягиванием ребра $[x, y]$* в графе

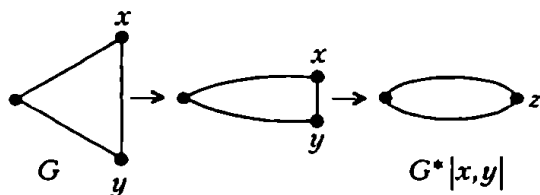


Рис. 11

G , а граф, получающийся в результате этой операции, называется *стягиванием графа G по ребру $[x, y]$* и обозначается $G^*[x, y]$.

Понятно, что стягивание дерева по любому ребру — снова дерево.

Давайте теперь посмотрим на ПИШ как на преобразование графа.

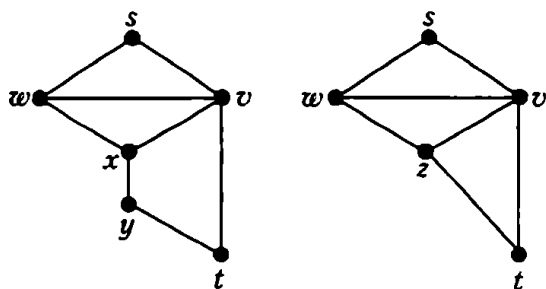
Когда игрок P закрашивает какое-то ребро красным цветом, он, по существу, запрещает проведение синего пути через это ребро, т.е. как бы удаляет ребро. Поэтому мы будем считать, что P во время своего хода не красит ребро, а удаляет его из графа. (Граф, получающийся в результате удаления ребра a из G , мы будем обозначать $G \setminus a$.)

А что делает игрок C ? Закрашивая ребро синим цветом, он, по существу, стягивает это ребро (рис.12)⁴.

Итак, мы играем в ПИШ следующим образом: игрок P удаляет ребра, а игрок C стягивает; при этом C выигрывает, если на некотором шаге вершины s и t сливаются в одну, а P выигрывает, если на некотором шаге граф становится несвязным и вершины s и t оказываются в разных компонентах.

Граф в процессе игры все время изменяется: после того, как P удалит из G ребро a , а C стянет ребро b , игра будет вестись на графе $(G \setminus a) * b$.

Рис. 12



Теорема Лемана

Леман доказал, что вариант ПИШ является C -игрой тогда и только тогда, когда в исходном графе имеются два дерева на одном и том же множестве вершин⁵, содержащие вершины s и t и не имеющие общих ребер.

Мы докажем здесь только «половину» теоремы Лемана: если в исходном графе имеются нужные деревья, то C -игрок имеет выигрышную стратегию. (Доказательство второй «половины» мы не приводим, так как оно весьма сложно.) Для доказательства нам понадобится следующая

Лемма. Пусть в исходном графе G есть два дерева A и B .

⁴ Для удобства обозначений будем считать, что если стягивается ребро, имеющее одним концом s (или t), то вершина, которая образуется в результате этого, снова будет называться s (соответственно t).

⁵ Это множество вершин в общем случае не совпадает с множеством вершин исходного графа.

удовлетворяющие условию Лемана. Пусть игрок P удалил ребро $a \in A$. Тогда игрок C может стянуть некоторое ребро $b \in B$ так, что в новом графе $(G \setminus a) * b$ либо вершины s и t слились, либо вновь найдутся два дерева A^* и B^* , удовлетворяющие условию Лемана.

Доказательство леммы. После удаления ребра $a = [x, y] \in A$ дерево A разбивается на две компоненты: $A(x)$ и $A(y)$. По лемме о двух деревьях в дереве B существует ребро b , один конец которого лежит в $A(x)$, а другой — в $A(y)$. Поскольку деревья A и B не имеют общих ребер, $a \neq b$. Именно это ребро b и должен стянуть игрок C .

Пусть в графе $(G \setminus a) * b$ вершины s и t не слились, т.е. $b \neq [s, t]$. Найдем тогда деревья A^* и B^* . Дерево B^* находится совсем просто — это $B * b$. Дерево A^* получается следующим образом: рассмотрим дерево, которое образуют компоненты $A(x)$, $A(y)$ и ребро b . Стянем это дерево по ребру b — это и будет дерево A^* .

Так как дерево A^* составлено из ребер дерева A , дерево B^* — из ребер дерева B , деревья A^* и B^* , так же как A и B , не имеют общих ребер. Очевидно, деревья A^* и B^* не пересекаются по ребрам и имеют одно и то же множество вершин, причем вершины s и t ему принадлежат. Лемма доказана.

Эта лемма подсказывает стратегию для соединяющего игрока.

Цель игрока C — поддерживать в графе существование двух деревьев, удовлетворяющих условию Лемана (делая это, он обеспечивает существование двух путей между вершинами s и t , и игроку P никогда не удастся разъединить эти две вершины). И игрок C действительно может это сделать, если такие два дерева имелись в исходном графе. Если игрок P удаляет ребро a в одном из этих деревьев, то игрок C в ответ должен стянуть ребро из другого дерева, существующее по последней лемме. Если же игрок P удаляет ребро, которое не принадлежит ни одному из наших двух деревьев, то игрок C может стянуть ребро в одном из деревьев; ясно, что в новом графе по-прежнему найдутся два дерева Лемана (какие?).

После каждой пары ходов количество вершин в каждом из наших деревьев уменьшается на единицу, поэтому вершины s и t рано или поздно сольются и игрок C выиграет.

Мы научили вас играть в C -игру, используя два дерева Лемана. Но как находить эти деревья? Конечно, можно использовать полный перебор, однако это связано с огромными затратами времени даже на современных ЭВМ. Леману не удалось

найти эффективного алгоритма для отыскания двух таких деревьев, поэтому некоторое время казалось, что теорема Лемана имеет лишь теоретический интерес. Только в начале 70-х годов Бруно и Вейнбергу удалось построить такой алгоритм.

На самом деле, Леман полностью решил переключательную игру Шеннона: он доказал также, что вариант ПИШ тогда и только тогда является P -игрой, когда в графе имеются два подграфа определенного вида. Если же вариант ПИШ является H -игрой, то после первого разумного хода мы получаем на новом графе вариант ПИШ, который является P -игрой или C -игрой — в зависимости от того, кто делал первый ход: P или C соответственно. Такой ход существует по определению H -игры. Найти этот ход в принципе можно перебором.

Стратегия для бридж-ит

Итак, мы рассказали, как играть в C -игры. Но ведь бридж-ит, согласно задаче 2, есть H -игра. Как же играть начинающему, чтобы выиграть?

Очевидно, что в игре бридж-ит начинающего можно считать C -игроком. Своим первым ходом он может стянуть, например, ребро, выделенное на рисунке 13 пунктиром. В получающемся после этого хода графе имеются два дерева Лемана: они выделены на рисунке 13 тонкими и жирными линиями. А затем игрок C может пользоваться описанной выше стратегией для C -игры. На рисунке 13 стрелочки расставлены таким образом, что если игрок P удаляет ребро, на которое указывает конец некоторой стрелочки, то игрок C в ответ должен стянуть ребро, на которое указывает другой конец этой же стрелочки (проверьте, что стрелочки расставлены в соответствии с доказанной леммой).

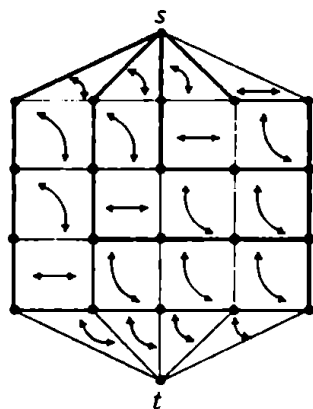


Рис. 13

Задача 4. Укажите другие возможные «выигрышные» начальные ходы для игрока C .

Американский математик О. Гросс предложил ту же самую стратегию, что и на рисунке 13, задолго до Лемана, не сводя бридж-ит к ПИШ. По рецепту Гросса, для того чтобы выиграть, игрок C должен первым ходом провести отрезок, обозначенный на рисунке 14, а затем действовать так: если игрок P задевает своим ходом один конец

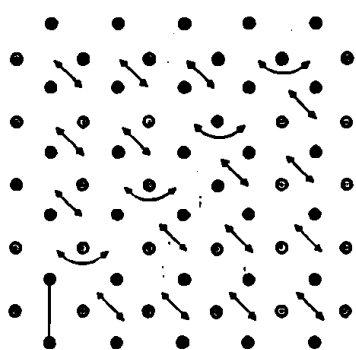


Рис. 14

некоторой стрелочки, то C ответным ходом должен задеть другой конец той же стрелочки.

А что дальше?

Научившись играть в ПИШ, вы, возможно, уже задали себе вопрос: «А нельзя ли простые и эффективные дискретные методы, которые в случае с ПИШ привели к полному успеху, распространить на другие игры?» Попытки применить такие

методы действительно были, однако они не дали результата даже для ближайшего «родственника» ПИШ — *вершинной переключательной игры Шеннона*. (Эта игра очень похожа на ПИШ, она также ведется на графе с двумя выделенными вершинами s и t , только красятся в ней не ребра, а вершины; при этом игрок C старается так покрасить вершины, чтобы от s к t можно было пройти путем, проходящим по вершинам своего цвета, а игрок P — помешать ему.) Более того, в 1976 году Ивен и Тарьян доказали, что найти выигрышную стратегию для вершинной переключательной игры Шеннона не проще, чем решить некоторые классические комбинаторные проблемы, для которых, как считают многие математики, вообще не существует эффективных алгоритмов решения. До окончательного решения подобных проблем еще далеко.

Е. Гук

Шахматы и математика имеют довольно много общих точек соприкосновения. В наших заметках речь пойдет в основном о математических задачах на шахматной доске.

Перелистывая книжки с такими привлекательными названиями, как «Математический калейдоскоп», «В мире тайн и чудес», «Веселые и занимательные числа и фигуры», вы наверняка обратили внимание на то, что в каждой из них содержится немало задач о фигурах на шахматной доске.

Иногда это головоломки, с которыми справится любой сообразительный человек, чаще для этого необходимы определенный математический опыт и знания. Такие задачи можно найти не только в популярных книжках, они регулярно предлагаются в математических кружках, на олимпиадах, нередко встречаются и в серьезной математической литературе. Короче говоря, существует множество математических задач, как простых, так и сложных, с различным шахматным содержанием.

Цель настоящих заметок как раз и состоит в том, чтобы попытаться в какой-то степени систематизировать эти задачи и хотя бы кратко рассказать о наиболее интересных из них.

Мы надеемся, что вы знакомы с ходами шахматных фигур, хотя заранее предупреждаем, что особого умения играть в шахматы не потребуется.

Возможно, некоторые из вас решат, что математики совсем сошли с ума и вместо того, чтобы заниматься делом, развлекаются, расставляя фигуры на доске (уж лучше бы играли просто в шахматы!). Однако труд математиков в этом направлении имеет свой смысл. Дело в том, что для решения ряда важных математических задач шахматную доску и фигуры очень удобно использовать в качестве модели.

Не случайно шахматные термины можно встретить в литера-

туре по теории игр, кибернетике, теории графов, комбинаторике, теории чисел, программировании.

Приведем один пример. Что общего между чисто шахматным понятием «ладья» и чисто математическим «многочлен»? Тем не менее американский математик Д. Риордан в своей книге «Введение в комбинаторный анализ» (М.: ИЛ, 1963) как раз применяет термин «ладейный многочлен»! Чем это вызвано?

Оказывается, большой класс комбинаторных задач сводится к определению числа размещений на шахматной доске заданного числа ладей, не угрожающих друг другу (ни одна пара ладей не должна находиться на одной вертикали или горизонтали). А при рассмотрении еще более сложных задач существенную роль играет многочлен

$$R(x) = r_0 + r_1x + r_2x^2 + \dots + r_kx^k + \dots + r_nx^n,$$

где r_k — число размещений на доске размера $n \times n$ не угрожающих друг другу k ладей ($k = 0, 1, 2, \dots$). Этот многочлен и был назван Риорданом ладейным; как мы видим, такое название вполне оправдано.

Заметим также, что бездонное море задач и проблем возникает тогда, когда речь заходит о создании машины, играющей в шахматы (а точнее, программы для нее). Этой модной в наши дни теме посвящены десятки и сотни специальных статей, книг, дискуссий и даже диссертаций, и мы не станем подробно останавливаться на ней.

От персидского шаха до наших дней

Наш разговор естественнее всего начать с рассмотрения свойств шахматной доски, пока не расставляя на ней фигур.

Конечно, каждый из вас слышал знаменитую легенду о происхождении шахмат. Мудрец, придумавший их, потребовал в награду от персидского шаха, которому игра очень понравилась, столько зерен пшеницы, сколько понадобится для покрытия всех клеток шахматной доски, если на ее первую клетку положить одно зерно, а на каждую следующую вдвое больше, чем на предыдущую (рис.1).



Рис. 1

Оказалось, что для этого не хватит пшеницы, хранящейся не только в амбарах шаха, но и во всех амбарах мира.

Мудрец скромно потребовал

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1$$

зерен. Это число записывается двадцатью цифрами и превышает 18 квинтиллионов ($2^{10} = 1024 \approx 10^3$). Конечно, с математикой здесь небольшая связь, скорее, полученный результат как бы символически иллюстрирует грандиозные математические возможности, скрывающиеся в шахматной доске.

Пожалуй, самое любопытное свойство шахматной доски заключается в том, что кратчайшее расстояние на ней измеряется не обязательно по прямой. Например, геометрически расстояние от поля a1 до поля h8 больше, чем до a8, а королю на любой из этих переходов требуется ровно 7 ходов. Для математиков, которым приходится сталкиваться с самыми разнообразными расстояниями (метриками), это обычное дело.

Особенно эффектно указанное свойство проявляется в знаменитом этюде Рети (рис.2).

Кажется совершенно невероятным, что в этом положении белый король в состоянии догнать черную пешку. Однако это становится возможным, если он отправляется за ней не по прямой...

1. **Kph8–g7** **h5–h4** 2. **Kpg7–f6**. Теперь грозит 3. **Kpf6–e6**, и при поддержке короля белая пешка проходит в ферзи одновременно с вражеской.

2... **Kpa6–b6** 3. **Kpf6–e5**. Грозит 4. **Kpe5–d6**, и, несмотря на то, что король довольно далеко удалился от вертикали h, после вынужденного 3... **Kpb6: c6** он возвращается и поспекает к пешке на дороге ее превращения в ферзя: 4. **Kpe5–f4** **h4–h3** 5. **Kpe5–g3** **h3–h2** 6. **Kpg3: h2**. Ничья!

Конечно, за доской шахматиста никто не заставляет решать математические задачи, – чтобы хорошо играть в шахматы, совсем не обязательно быть математиком. Беспрерывный расчет вариантов, который приходится вести шахматисту во время партии, имеет совершенно иную специфику, чем аналогичная работа математика. И все же математический навык иногда оказывается весьма полезным для шахматиста, особенно в эндшпиле. Возвращаясь к упомянутому свойству шахматной доски, приведем пример, когда упущение его из виду привело к трагедии.

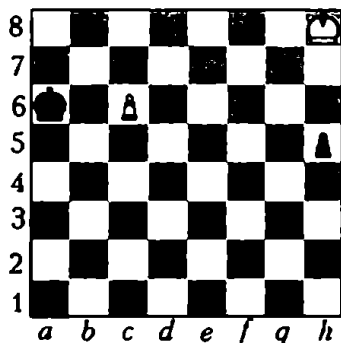


Рис.2. Р.Рети, 1921 г.
Ничья

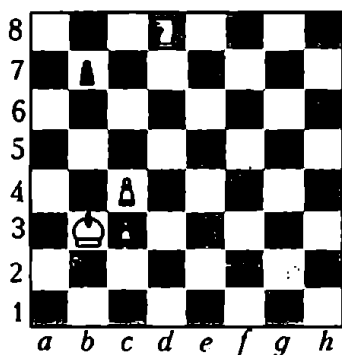


Рис. 3

Позиция на рисунке 3 возникла в шестой партии матча на первенство мира М.Ботвинник – Д.Бронштейн (1951 г.). Здесь Бронштейн, игравший белыми, легко делал ничью путем 1. Kd8–e6+ и 2. Ke6–d4, однако сначала он решил подтянуть короля к опасной пешке: 1. Krb3–c2. Разумеется, гроссмейстер хорошо видел возможность появления черного короля на поле f2, однако он рассматривал только 1...Kpf4–f3

и 2...Kpf3–f2 и полагал, что здесь также успеет сыграть 2. Kd8–e6 e3–e2 3. Ke6–d4+ с ничьей. Король Ботвинника действительно отправился на f2, но не по прямому пути, а по обходному. После 1...Kpf4–g3!! белым пришлось сдаться, так как пешку e3 остановить невозможно: на 2. Kd8–e6 следует 2...e3–e2, и конь попадет на d4 без шаха.

Рассмотрим теперь несколько уже вполне математических задач, связанных с шахматной доской. Во многих из них требуется определить, можно ли данную доску покрыть целиком теми или иными геометрическими фигурами. Вот один красивый пример на эту тему.

На рисунке 4,а изображен урезанный квадрат размером 8×8 . Спрашивается, можно ли покрыть его целиком (и без наложений) костями домино размером 2×1 ?

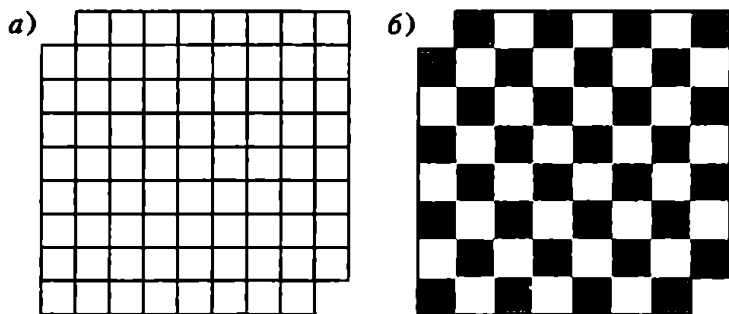


Рис. 4

Мы могли бы пустить в ход громоздкие алгебраические уравнения, однако «шахматное» решение задачи лаконичнее и изящнее. Окрасим этот квадрат (без угловых клеток), как и полагается, в черный и белый цвета, превратив его в урезанную шахматную доску (рис.4,б). Теперь заметим, что каждая кость

домино покрывает одно белое поле и одно черное. У нас же белых клеток на две меньше, чем черных, а потому необходимого покрытия не существует!

Иногда вместо обычных шахмат рассматриваются их различные видоизменения, связанные с преобразованиями шахматной доски, причем эти преобразования носят вполне математический характер. Чаше всего этим занимается шахматные проблемисты. В «Кванте» (см. №5, 1970) уже рассказывалось о цилиндрических и тороидальных шахматах. Любопытно рассматривать цилиндрическую доску, у которой вырезана одна вертикаль (рис. 5,а). На такой доске слон становится хамелеоном: превращается из белопольного в чернопольного и наоборот! Разумеется, цилиндр и тор (рис. 5,б) – далеко не единственные поверхности, которые можно склеить из шахматной доски. Много хитростей имеют и конусоидальные шахматы (рис. 5,в).

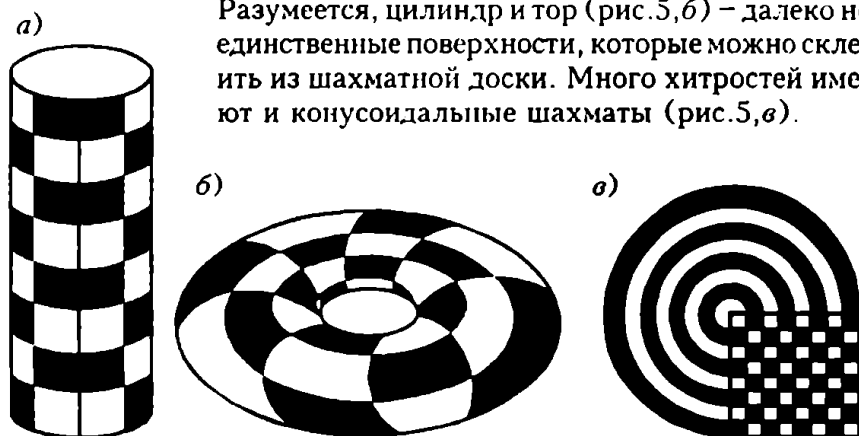


Рис. 5. а) Цилиндрическая шахматная доска без вертикали с. б) Тороидальная шахматная доска. в) Конусоидальная шахматная доска получается приклеиванием вертикали а к восьмой горизонтали.

Легко привести примеры шахматных задач, которые решаются на одной из упомянутой досок и не решаются на других. Например, задание «мат в один ход» на рисунке 6 выглядит нелепым. Однако на цилиндрической доске, получающейся склеиванием вертикалей а и h, оно выполнимо: 1. h3–h4 mat! Поля b4 и b6 здесь держит конь, а b5 – слон, на линию h черного короля не пускает его белый оппонент. Заметим, что при белой пешке на h2 мата уже нет, так как после 1.

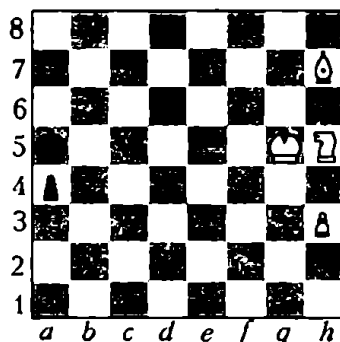


Рис. 6. Мат в один ход

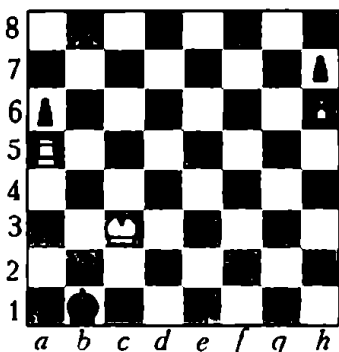


Рис.7. Мат в два хода

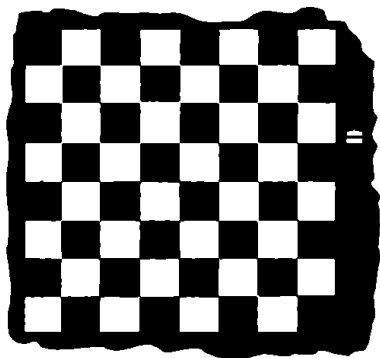


Рис.8. Сферическая шахматная доска. С дополнительного внешнего поля, окружающего всю доску, можно войти на доску в любом месте и в любом направлении (по вертикали, горизонтали или диагонали). Например, ладья на пустой доске может одним ходом пройти по всем полям (проходя 7 раз через внешнее поле)

h2–h4 черные берут на проходе¹ 1...a4 : h3.

Однако и на цилиндрической доске удастся не все, что возможно на обычной. Например, чтобы заматовать королем и ладьей одинокого короля противника, его недостаточно прижать на линию а или h, требуется еще загнать его на первую или восьмую горизонталь, а на цилиндрической доске это невозможно. На тороидальной доске, как нетрудно убедиться, с «голым» королем противника не может справиться даже ферзь.

А вот еще один забавный пример (рис.7). Здесь мат в два хода дается как на обычной, так и на цилиндрической доске, но на каждой из них по-своему.

На обычной доске все очень просто:

1. Ла5 : а6 Крb1–c1 2. Ла6–a1 мат.

На цилиндрической же после хода 1 Ла5:а6 проигрывается ладья ввиду ответа 1...h7:а6! С другой стороны, если ладья уйдет с а5, то черные продвинут вперед пешку а6, и мата нет. Решает 1. Ла5–a5!! – ладья проходит по окружности и возвращается на исходное поле! Дальнейшее известно: 1...Крb1–c1–2. Ла5–a1 мат.

Предлагаем вам самим придумать аналогичные примеры на тороидальных и конусоидальных досках.

Среди югославских шахматных проблемистов распростране-

¹ Взятие на проходе – взятие неприятельской (скажем, черной) пешки, продвинувшейся из начального положения на два поля и ставшей рядом по горизонтали с белой пешкой. При этом пешка противника (черная) снимается так, как если бы она продвинулась на одно поле.

ны так называемые проективные шахматы на бесконечной шахматной доске с четырьмя дополнительными полями. На обычной доске с одним дополнительным полем получаются сферические шахматы (рис.8). Однако подробное изучение шахматной игры на полученных досках не входит в наши планы.

В заключение предлагаем вам несколько задач для самостоятельного решения.

1. Докажите, что стоклеточную доску размером 10×10 нельзя целиком и без наложений покрыть фигурами, образец которых приведен на рисунке 9.



Рис. 9



Рис.10

2. Обычная костяшка домино состоит из двух квадратов. Назовем «тримино» фигуру, составленную из трех квадратов (рис.10). Если шахматную доску покрыть двадцатью одним «тримино», то одно поле останется свободным. Каким оно может быть?

3. Из доски размером 8×9 вырезаны 12 полей (рис.11) Докажите, что оставшуюся часть нельзя покрыть «тримино».

4. Пусть доска имеет нечетное число полей (например, ее размер 7×9). Поля с общей стороной назовем смежными. Поставим на каждое поле доски по пешке и снова расставим их на доске.

а) Может ли теперь каждая пешка оказаться на поле, смежном с тем, которое она занимала при первой расстановке?

б) Пусть при вторичной расстановке пешки, занимавшие раньше левые углы, остались на месте, а пешки, стоявшие при первой расстановке рядом друг с другом, по-прежнему стоят рядом. Могла ли какая-нибудь пешка изменить свое положение?

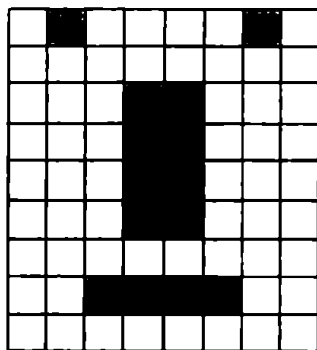


Рис.11

Немного истории

Го – одна из древнейших игр, дошедших до наших дней. Ей около 5 тысяч лет. Историки до сих пор спорят, какая из стран является родиной го. Одни специалисты считают, что эта игра зародилась в Индии, другие доказывают, что ее истоки восходят к Египту. Однако большинство сходится во мнении, что родина го – Китай.

Первым в списке претендентов на звание «отца» го (по-китайски она называется вейци) значится император Яо, правивший в XXIV – XXIII вв. до н.э. Уже тогда признавалось, что игра развивает интеллектуальные способности человека. Так, преемник императора Яо император Шунь использовал вейци для развития умственных способностей своего сына и наследника Шан Цзюня. А Конфуций отмечал, что вейци совершенствует личность человека.

Где-то в III или IV в. н. э. вейци проникла через Корею в Японию. Первоначально в нее играли монахи-буддисты, императоры же преследовали это занятие, считавшееся столь же порочным, как пьянство. 701 год стал великим годом в истории го на Японских островах: императорским эдиктом игра была признана неазартной и приравнена к упражнениям на музыкальных инструментах. Так, наконец, подпольные занятия монахов получили государственную легальность.

Шли годы. Игра проникла в широкие слои дворянства, купечества, ремесленников и даже крестьян. В 1603 г. сёгуном (правителем) Няэсу был издан эдикт об учреждении Академии го. Но вот наступил 1868 год -- год так называемой «революции Мэйдзи». Микадо – император Муцухито – лично возглавил правительство страны, провел серию буржуазных реформ, обновивших общественную жизнь Японии. Го, причисленная к анахронизмам и нелепостям сметенного феодального

Опубликовано в «Кванте» №6 – 8 за 1992 г.

порядка, почти исчезла из японской жизни. Однако, как это ни парадоксально, именно революция Мэйдзи, нанеся такой удар по го внутри Японии, способствовала тому, что игра вышла на мировые просторы. После переворота 1868 г. Япония порвала с традиционной политикой изоляции от остального мира: не только идеи западной цивилизации хлынули в эту страну, начался и встречный поток. Европейцы знакомились с японскими обычаями, искусством, архитектурой, узнали они и любимую японцами игру го.

В начале XX в. в Европе стали появляться первые любительские клубы игроков го. Эмануэль Ласкер — тогдашний чемпион мира по шахматам — также заинтересовался игрой. Он быстро убедился, что она дает богатые возможности как для глубоких стратегических замыслов, так и для изящных тактических маневров. Еженедельно в доме Ласкера стали устраиваться вечера игры в го, в которых помимо хозяина принимали участие Эдуард и Бертольд Ласкеры — братья чемпиона мира, тоже очень сильные шахматисты. Ласкер, известный также и как математик, считал го идеальной игрой для математического ума. Между тем японцы, подметил он, до сих пор не выдвинули ни одного математика, который мог бы сравниться с величайшими гениями мира. Значит, это должно сказаться и в го. Сделав сей скороспелый вывод, Ласкер стал поговаривать о том, чтобы поехать в Страну восходящего солнца и встретиться там с ведущими мастерами игры.

Но случай помог чемпиону мира обойтись без дальнего вояжа. В то время в Берлине существовал японский клуб го. Трио Ласкеров отправилось туда, чтобы встретиться с одним японским игроком, не отличающимся высоким классом. Тот охотно согласился сыграть против всех троих, причем разрешил противникам консультироваться друг с другом и, более того, обещал дать вперед девять камней форы, что примерно равноценно ферзю в шахматах!

Немало удивленный, Э. Ласкер незамедлительно высказал сомнение: дескать, едва ли кто в мире сможет успешно соперничать с ним на таких условиях. Тем более что он уже довольно долго изучал теорию игры, разбирал партии японских мастеров и считал, что достиг в го достаточно глубокого понимания.

Задетый за живое, чемпион мира пытался отклонить предложение самонадеянного японца и хотел играть только на паритетных началах. Но японский игрок лишь загадочно улыбался и отрицательно качал головой.

«Ну хорошо же, хочет — пусть попробует!» Встреча состоя-

лась. Ласкер и его союзники старательно обдумывали каждый ход, делая его лишь после длительного обсуждения между собой. Японец отвечал молниеносно, тратя на каждый ход доли секунды. Несмотря на огромную фору, японец наголову разгромил противников.

Огорченный таким исходом игры, Ласкер был вынужден признать, что, очевидно, в го таится много тонкостей, ускользнувших от его внимания. Впрочем, несмотря на такое сокрушительное поражение. Ласкер остался на всю жизнь горячим поклонником го и даже написал учебник для начинающих игроков.

В настоящее время в Японии и во всем мире проводится масса соревнований как среди профессионалов, так и среди любителей. О популярности игры можно судить по таким цифрам: только в Японии насчитывается около 10 миллионов любителей го, а во всем мире их более 20 миллионов. Регулярно проводятся чемпионаты мира, Европы, турниры «Гран-при» и другие. Начиная с 1986 г. в них стали участвовать и наши спортсмены.

Правила и понятия

Что такое го?

Представим себе, что двое путешественников попали на необитаемый остров и после того как пришли в себя, занялись дележом территории. Очевидно, в выигрыше окажется тот, кто отгородит себе территорию побольше.

Смысл игры го как раз заключается в отгораживании большей территории.

Доска для игры — тот же необитаемый остров, а игроки — путешественники, оказавшиеся на нем.

Игровое поле расчерчено 19 вертикальными и 19 горизонтальными линиями. Точки пересечения этих линий образуют 361 пункт для игры. (Здесь же расположен ряд форовых точек — для игры с форой. О ней мы в этой статье рассказывать не будем.) В комплект кроме доски входит набор фишек черного и белого цвета, которые называются камнями.

Начинающим рекомендуется использовать доску размером 13 × 13. На ней легче освоить и правила, и основные технические приемы го. Японцы считают, что, прежде чем переходить к большой доске, надо сыграть не меньшей 100 партий на малой.

Итак, в го играют два партнера, у одного из которых черные камни, а у другого белые. Игра начинается с пустой доски. Ходы делаются поочередно. Первыми ходят черные. *Ход* игрока состоит в постановке камня на любой свободный пункт доски.

Выставленный на доске камень не может быть перемещен в другое место и остается на ней до конца партии, за исключением тех случаев, когда он считается уничтоженным.

Если камень или группа камней уничтожены, все они снимаются с доски и учитываются только по окончании партии.

Каждый камень, стоящий на доске, имеет «дыхательные пространства» (*дамэ*). На рисунке 1, а показано, что у одиночного камня, стоящего в центре доски, имеется 4 дамэ, у камня,

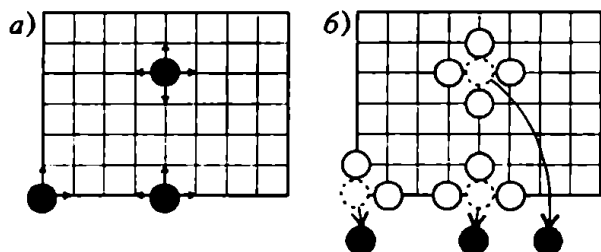


Рис. 1

стоящего на краю доски. — 3 дамэ, а у камня, находящегося в углу (на пересечении двух пограничных линий), — только 2 дамэ. Если все дыхательные пространства перекрыты камнями противника, то такой камень считается уничтоженным и снимается с доски (рис.1, б).

То же самое правило применимо и к *группе камней*. Группой называется набор камней, стоящих вплотную один к другому, которые не могут быть отделены друг от друга и уничтожены поодиночке. На рисунке 2 показана группа, состоящая из двух камней: их нельзя отделить друг от друга, и они имеют общую судьбу. У этой группы шесть дыхательных пунктов, и поэтому для снятия ее с доски требуется шесть камней противника. Очевидно, что для снятия одиночного камня требуется не больше 4 камней. Таким образом, чем больше камней в группе, тем сложнее ее уничтожить, т.е. она сильнее.

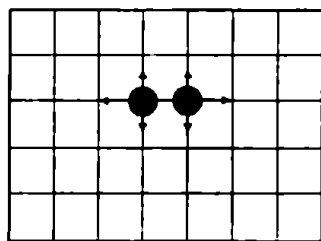


Рис. 2

Мы сказали, что играющий может сделать ход в любой свободный пункт доски, но есть исключения. В го имеется два типа запрещенных ходов.

1. Запрещается делать ход, приводящий к закрытию последнего дамэ у собственных камней, если только этим ходом не уничтожаются камни противника.

Другими словами, в го запрещено делать самоубийственные ходы. Это правило, по-видимому, введено для того, чтобы избежать грубых ошибок, так как потеря собственных камней — это почти всегда плохо.

На рисунке 3, а приведена ситуация, в которой черные не могут сделать ход в пункт «а», так как в этом случае их камни

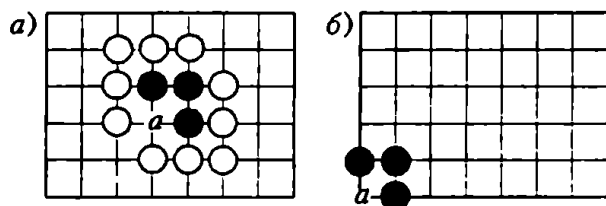


Рис. 3

окажутся уничтоженными. Теперь рассмотрим позицию на рисунке 3, б. Здесь уже белые не могут пойти в пункт «а»,

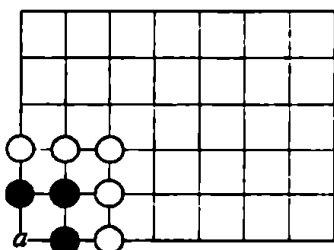


Рис. 4

поскольку в этом случае их камень окажется без единого свободного дамэ. Это другой пример самоубийственного хода. Однако бывают случаи, когда такой ход все-таки возможен (рис.4). Ситуация на этом рисунке напоминает положение на рисунке 3, а, но здесь камни черных вплотную окружены белыми камнями. В этом случае белые могут пойти в точку «а»: при этом

уничтожаются камни противника и ход не является самоубийственным.

2. Запрещается делать ход, приводящий к повторению позиции (*правило ко*).

Рассмотрим рисунок 5, а. Такое расположение камней имеет специальное название — позиция ко. Черные ходом в точку «а»

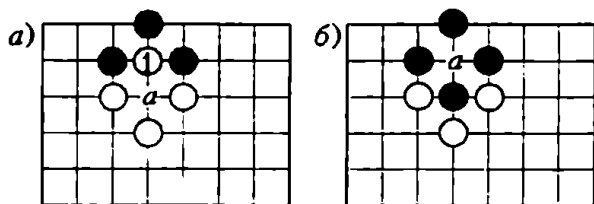


Рис. 5

могут захватить камень белых 1, и тогда возникнет позиция, изображенная на рисунке 5, б. Теперь, если бы не существовало правила запрета повторения позиции, белые, в свою очередь,

могли бы забрать камень черных ходом в точку «а» на рисунке 5, б. Таким образом, взаимное взятие могло бы продолжаться до бесконечности и игра потеряла бы смысл. Для того чтобы этого не произошло, и было введено правило ко.

Вернемся снова к позиции на рисунке 5, а. Черные взяли камень белых ходом в пункт «а». Теперь, после введения правила ко, для того, чтобы белые смогли забрать камень черных, надо, чтобы позиция изменилась, т. е. белые должны сделать ход в другом пункте доски. И только в случае, если черные не закроют *ко-борьбу* ходом в «а» на рисунке 5, б, белые смогут забрать камень черных.

Игра прекращается, если оба партнера отказываются от своего очередного хода. Обычно такой момент наступает тогда, когда не остается ходов, приносящих очки (рис.6). Теперь начинается заполнение нейтральных пунктов (на рисунке 6 «а» и «б»), и затем идет подсчет очков. Нейтральными называются такие пункты территории, которые при заполнении их камнями не приносят очков ни одному из партнеров.

Игрок, набравший наибольшее количество очков, объявляется победителем.

При подсчете очков, связанном с *пленными камнями*, снятыми во время игры, они для удобства подсчета выставляются на территорию противника. В примере на рисунке 6 черные захватили в плен три белых камня, а белые — два черных (эти камни отмечены треугольниками, далее в тексте мы будем их называть «отмеченные камни»). Затем камни перемещаются внутри своей территории (рис.7) для образования прямоугольных областей, удобных для подсчета (перемещенные камни обозначены кружками).

Теперь уже можно легко подсчитать результат партии. Территория черных составляет 42 очка (30 очков на правой стороне доски и 12 очков в центре), а территория белых — 40,5 очков (14

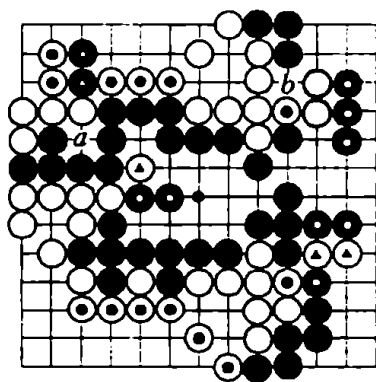


Рис. 6

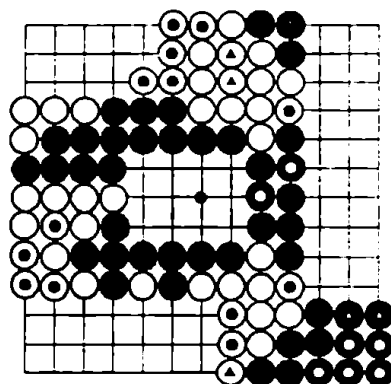


Рис. 7

очков на верхней стороне, 21 очко на нижней и 5,5 очка *коми*). Следовательно, в этой партии черные выиграли с перевесом в 1,5 очка.

Что такое *коми*? Это компенсация за право первого хода черных — до начала партии они отдают белым 5,5 очка (5 из них передаются в виде пяти камней и 0,5 очка — условно). Эта половина очка исключает ничейный исход игры.

Живые и мертвые группы

Наряду с правилами игры, одним из самых важных моментов, необходимых для понимания го, является умение разобраться, какие группы *живут*, а какие *умирают*. Для этого введем понятие *глаз* и дадим его определение.

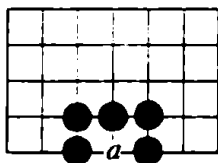


Рис. 8

Глазом (недоступным пунктом) называется свободный пункт группы, который не может быть занят противником, пока у этой группы существует еще хотя бы один свободный пункт.

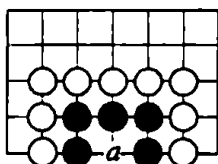


Рис. 9

На рисунке 8 приведена группа, у которой имеется один глаз в пункте «а». Эта точка не может быть занята, так как в противном случае ход будет самоубийственным, т.е. запрещенным правилами. Но после того, как будут закрыты все свободные пункты, ход в точку «а» будет возможен — теперь группа черных уничтожается (рис.9). Следовательно, можно сделать важный вывод, что группа с одним глазом не живет.

Два глаза — жизнь! Группа, имеющая два глаза, не погибает, даже полностью окруженная противником. Это один из самых главных принципов го. На рисунке 10 приведена группа с двумя глазами в пунктах «а» и «б». Ход в любой из этих пунктов является запрещенным, и следовательно, группа живет.

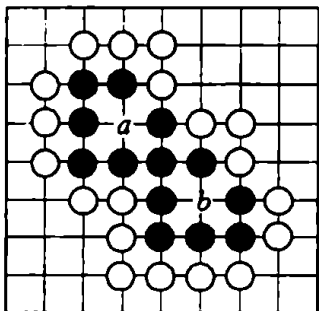


Рис. 10

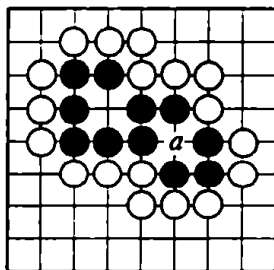


Рис. 11

Начинающих следует предостеречь от одной распространенной ошибки: они часто не могут отличить настоящего глаза от ложного.

Рассмотрим позицию на рисунке 11. Здесь показана конфигурация камней, которая очень похожа на единую группу с двумя глазами. Однако на самом деле это не так. На диаграмме — две отдельные группы. Одна группа, имеющая один глаз, состоит из восьми камней, вторая группа, состоящая из трех камней, глаза не имеет совсем. Пункт в точке «а» глазом не является, так как в него можно пойти и уничтожить группу черных, состоящую из трех камней. В данном случае пункт «а» является последним свободным пунктом группы из трех камней и внешним свободным пунктом группы из восьми камней. Такой свободный пункт называется *ложным глазом*.

Есть ли связь между глазом и территорией?

На рисунке 12 черные камни огораживают территорию, состоящую из 15 очков. Но если быть точным, то этот участок можно считать территорией только в том случае, если черные камни, при атаке их белыми, смогут построить два глаза. В данной позиции это, без всяких сомнений, территория черных, поскольку, куда бы белые ни пошли, они не могут помешать черным построить два глаза.

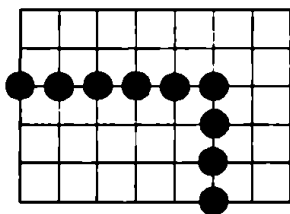


Рис. 12

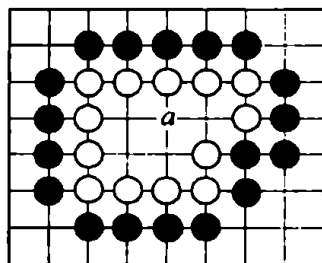


Рис. 13

Часто бывает, что группа имеет территорию из нескольких пунктов, но построить на ней можно всего один глаз. Глаз, имеющий территорию из нескольких пунктов, называется *большим*.

Большой глаз легко свести к простому — из одного пункта территории. Для того чтобы понять, как это делается, разберем следующий пример.

На рисунке 13 приведена часто встречающаяся конфигурация большого глаза, которая обычно называется *автомобиль*. Судьба этой группы зависит от того, кто первым займет критический пункт «а». Если первыми пойдут туда белые, то они построят два глаза, если же черные, то группа белых гибнет.

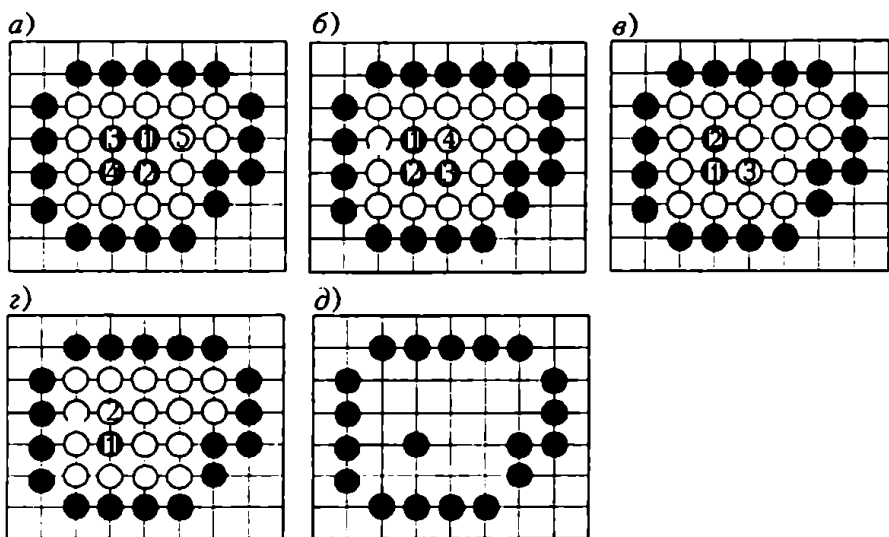


Рис. 14

Разберем, как это происходит. На рисунке 14,а черные продолжают занимать территорию противника камнями 2—4. После хода 4 белые камни оказываются в положении *атари*, т.е. под угрозой захвата. Поэтому они вынуждены сделать ход 5, и сами захватывают четыре черных камня. Но черные ходом 1 (рис. 14,б) продолжают последовательно занимать остальные пункты территории. В конце концов они поставят белые камни в положение атари, вынуждая белых ходить в свою территорию (ход 4), тем самым уменьшая ее. Постепенно она сведется к одному пункту (рис. 14,в,г). На рисунке 14,д приведена заключительная позиция, после того как был сделан последний ход и все камни белых сняты с доски. В реальной партии, если нет угрозы уничтожения камней игрока, такая операция по снятию камней противника не проводится, в этом нет необходимости. Группа, не имеющая возможности построить два глаза, считается пленной и снимается с доски лишь после окончания партии.

В го существует еще и другой вид жизни. На рисунке 15,а приведена группа, состоящая из семи пунктов территории. Если черные попытаются уничтожить белых, сыграв в критический пункт ходом 1, то им это не удастся, так как белые, противодействуя ходами 2 и 4, построят позицию *сэки* (рис. 15,б). В этой позиции ни одному из партнеров не выгодно ходить, так как в противном случае его камни погибнут. Территория, расположенная между камнями, считается нейтральной: никто из играющих не может претендовать на ее захват.

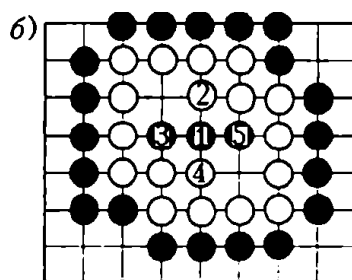
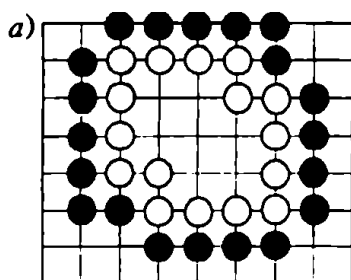


Рис. 15

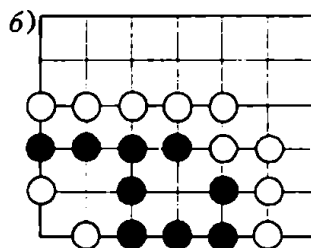
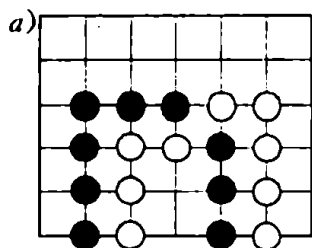


Рис. 16

На рисунке 16 приведены другие часто встречающиеся в игре ситуации сэки.

После всего сказанного можно дать один практический совет: не надо стремиться строить группы с двумя глазами. Как правило, это невыгодно — надо тратить лишние ходы, да еще занимать свою территорию. Правильным в этой ситуации будет создание таких групп, которые при атаке на них всегда смогут выжить.

Начало игры

Начальная стадия называется *фусэки*, она продолжается в среднем от 20 до 50 ходов.

Один из главных принципов *фусэки* — экономия ходов.

На рисунке 17 хорошо видно, что для получения одной и той же территории из 9 пунктов в углу доски требуется 6 камней, на стороне — 9 камней и в центре — 12 камней. Отсюда делаем вывод, что выгоднее всего занимать углы, затем стороны и только после этого начинать борьбу за остальную часть доски.

Следующий основной принцип *фусэки* — игра по третьей и четвертой линиям.

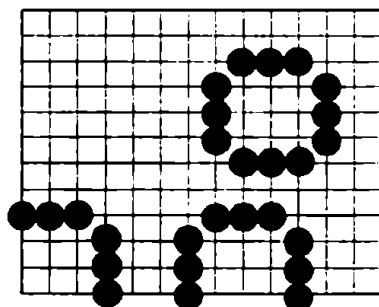


Рис. 17

Почему? Вторая от края доски линия не дает большой территории, поэтому ставить свои камни на нее в начале партии невыгодно. Вторую линию иногда называют линией поражения.

Пятая линия с первого взгляда кажется очень выгодной, так как намечает для захвата большую территорию, но го — это игра гармонии и баланса. В ней нельзя быть слишком азартным. Ход по пятой линии не может удержать намеченной территории. Еще хуже играть по шестой, седьмой и более высоким линиям. Поэтому основными для игры в начальной стадии партии являются, повторяем, третья и четвертая линии. Однако они имеют разные характеристики. Легче всего для создания территории использовать третью линию — ее называют «территориальной». Но играть все время только на третьей линии также нецелесообразно, и надо стремиться сочетать игру на третьей линии с игрой на четвертой.

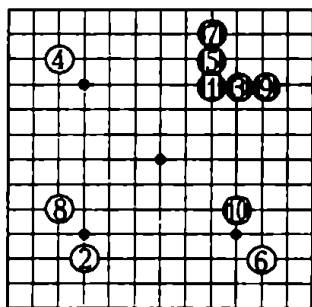


Рис. 18

Часто начинающие делают одну распространенную ошибку, пытаясь с самого начала строить прочную территорию. На рисунке 18 показано фусэки из партии двух начинающих игроков. Один из них стал с самого начала выгораживать себе территорию в углу, а второй расставлял камни по всей доске, намечая только контуры будущих территорий. В итоге второй игрок обогнал первого в развитии и одержал легкую победу.

Игра в углах

Существует несколько стандартных точек для игры в углах. На рисунке 19 показаны четыре наиболее распространенные — «a», «b», «c» и «d». Камень, поставленный в точку «a» (*сансан*), надежно удерживает угловую территорию, но его недостаток — слабое влияние на другие части доски. Камень в точке «b» (*хоси*), наоборот, имеет превосходное влияние, но недостаточно прочно удерживает территорию в углу. Точки «c» и «d» (*комоку*) обеспечивают контроль над частью угла и воздействуют на одну из сторон. При ходе в комоку возможность создания территории более велика в том месте, где камень находится ближе к краю доски (т.е. на третьей линии).

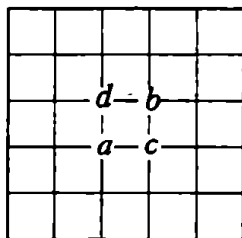


Рис. 19

Для более эффективного контроля над

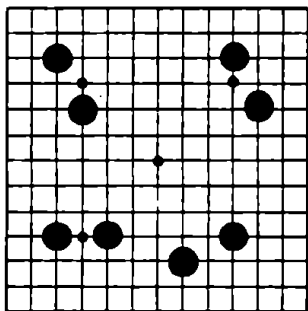


Рис. 20

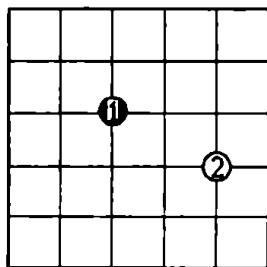


Рис. 21

углами применяются построения, которые называются *симари* (закрытые). На рисунке 20 приведены несколько различных типов симари. Однако они служат не только для контроля над территорией в углу, они являются хорошей базой для распространения на стороны и центр доски.

Учитывая сложность борьбы против симари, противник часто не дожидается постановки второго камня в углу, а сам занимает эту точку (рис.21). Такой ход называется *какари* (нападение). В результате атаки ходом какари часто возникает сражение, которое приводит иногда к очень сложной борьбе.

Хираки

После того как партнеры разыграли углы, их внимание переключается на стороны. Они вступают в стадию *хираки* (распространение). Лучшим и наиболее естественным является занятие центральной точки на стороне. На рисунке 22 показаны лучшие точки для разворачивания от камня хоси. Трудно точно сказать, какая из этих точек лучшая, так как каждая из них имеет свои плюсы и минусы.

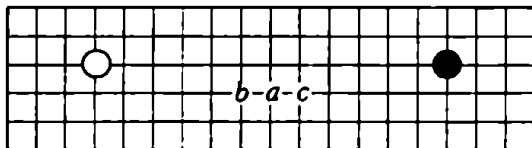


Рис.22

Ход в точку «а» является наиболее стандартным и часто встречающимся, поскольку занимает центр симметрии. Неплохо выглядит и ход в точку «b». С одной стороны, он очень эффективен — расширяет сферу влияния, но вместе с тем слабее связь со своим камнем в хоси, и ее легче разорвать.

Ход в точку «с» на один пункт ближе к своему камню в хоси, и поэтому связь гораздо прочнее, но эффективность в расширении сферы влияния слабее.

Дзесэки

Слово *дзесэки* в Японии используется для описания любой принятой нормы поведения. Однако в словаре про дзесэки написано, что это «камни, расположенные наилучшим образом в игре го»!

Розыгрыш дзесэки начинается всегда с угла, поэтому дзесэки дают и такое определение: «стандартный розыгрыш в углу».

В настоящее время существует огромное множество дзесэки — порядка 20 тысяч, причем каждый год эта цифра растет. Узнав

о таком обилии дзесэки, которые надо изучать, многие начинающие приходят в ужас. Но пугаться не надо: механическое заучивание дзесэки может даже помешать росту мастерства, отучивая от самостоятельного мышления.

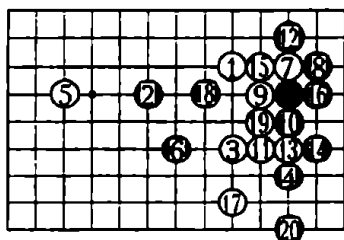


Рис. 23

Возникает вопрос: а зачем же они нужны? Изучение дзесэки избавляет

от бесполезной траты энергии на нахождение известных вариантов, а также помогает овладеть техническим мастерством и обрести навыки в нахождении *тэсудзи* (лучший ход).

Разберем несколько примеров. На рисунке 23 приведено часто встречающееся дзесэки. Если рассматривать его на пустой доске, то розыгрыш за обе стороны является абсолютно равным.

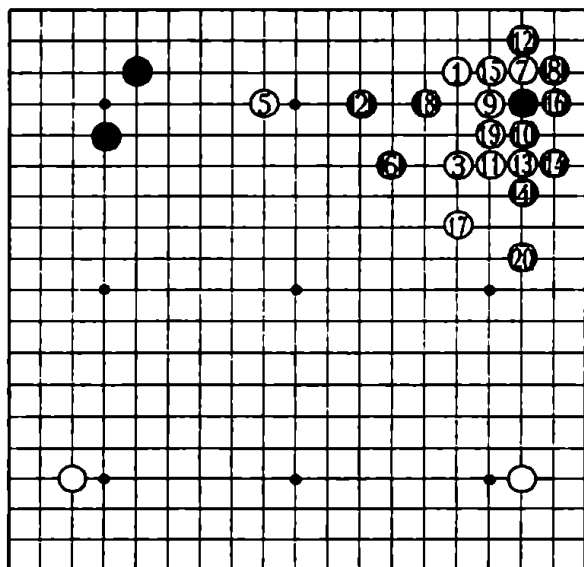


Рис. 24

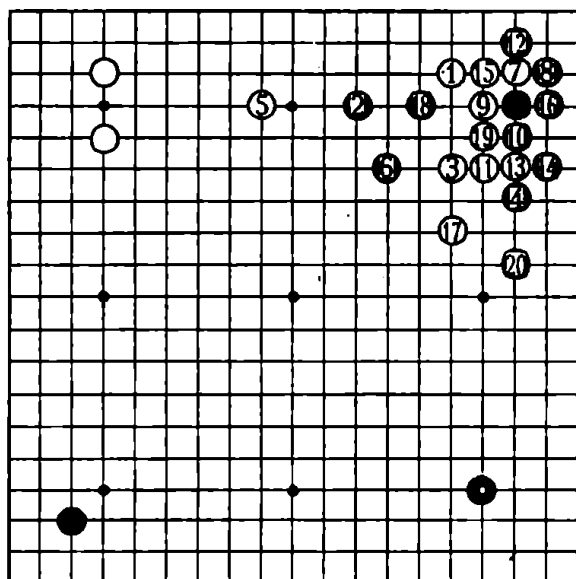


Рис. 25

Однако для каждой конкретной позиции это дзесэки может оказаться как хорошим, так и плохим.

Сравним рисунки 24 и 25. На них приведены позиции из разных партий, но в обеих встречается наше дзесэки. После небольшого анализа можно сказать, что если на рисунке 25 позиция белых перспективнее, то на рисунке 24 результат для

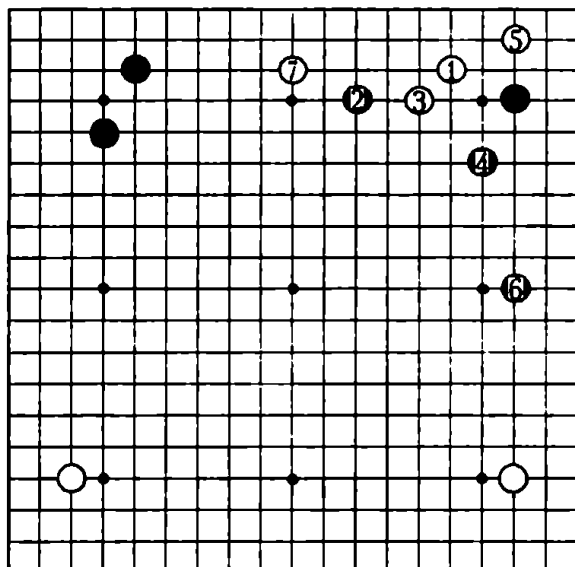


Рис. 26

них крайне неудачен. Эта ситуация возникла из-за того, что в первой партии (см. рис.24) белые неправильно выбрали дзесэки ходом 3. В результате у них образовались две слабые группы: камень 5 и камни 1, 3, 7, 9, 11, 13, 15, 17. В позиции на рисунке 25 у белых только одна слабая группа (камни 1, 3, 7, 9, 11, 13, 15, 17), которая уравнивается слабостью черных камней 2, 6 и 18. Камень 5 здесь не только сильный, но имеет идеальное распространение от своего симари. Вместо хода 3 на рисунке 17 белым лучше было сыграть, как на рисунке 26, с равными шансами.

Разрезание и соединение камней

Важное значение в партии имеет взаимосвязь камней. Совместные действия групп представляют значительную силу, разрозненные слабые группы подвергаются атаке и, в лучшем случае, обеспечивают себе жизнь.

На рисунке 27 приведена позиция, в которой два белых камня не являются соединенными между собой в одну группу. Ходом 1 черные разделяют их на две части. В результате белые попадают в затруднительное положение, и велика вероятность, что какой-нибудь из камней погибнет. Если же белые успеют соединиться в точке 1, то их камни будут представлять значительную силу, и их будет не так-то легко захватить в плен.

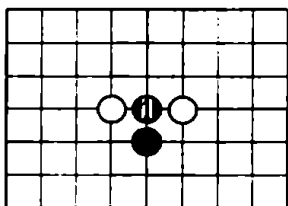


Рис. 27

Прямые соединения выполняют важную роль, особенно при непосредственном столкновении с камнями противника. Когда же прямого столкновения нет, намного выгоднее соединить свои камни не вплотную, а более широко, но таким образом, чтобы при их атаке они всегда могли соединиться.

Рассмотрим две позиции (рис.28,а,б). На рисунке 28,а показан пример, в котором играющий, памятуя о том, что соединять камни хорошо, расставил их в цепочку (ходы 1—9). Это

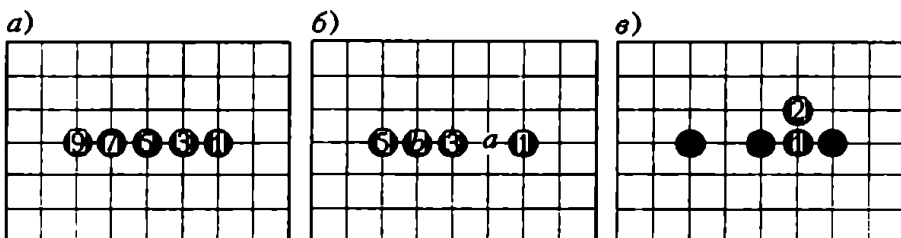


Рис. 28

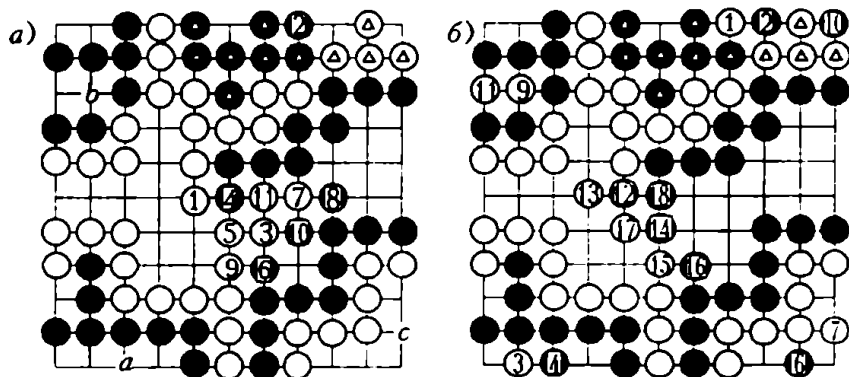
неэффективный путь игры. Более удачно расставил свои камни на рисунке 28,б другой игрок (ходы 1—5). В обоих случаях очерчены одинаковые территории, однако на рисунке 28,а для этого потрачено пять камней, а на рисунке 28,б — только три.

Можно, конечно, сказать, что на рисунке 28,б беспокойство вызывают промежутки между камнями «а» и «б». Но здесь нет повода волноваться. Если противник попытается ворваться туда (ход 1 на рисунке 28,в), то после хода 2 его постигнет неудача.

Ко-борьба

Ко-борьба — сложный раздел тактики. Применение ее приводит к острым продолжениям, обменам больших групп камней и требует хорошего понимания игры в целом.

Рассмотрим позицию на рисунке 29,а и возможное продолжение партии. Белые, избирая спокойный путь игры, делают в



⑤ → ① (Ход 5 в точку 1)

⑬ → ②

Рис. 29

центре ход 1. Черные ходом 2 создают ситуацию сэки в правом верхнем углу, тем самым избавляясь от возможных осложнений. Последующая игра приведет к следующему результату: 15 камней у белых против 16 у черных. Такой результат не может устроить белых. Поэтому они завязывают своим первым ходом ко-борьбу в правом верхнем углу. Эта более сложная игра позволяет белым использовать свое преимущество в ко-ударах («а» и «б»), каждый из которых угрожает черным потерей группы. У черных всего лишь одна серьезная ко-угроза в «с».

На рисунке 29,б демонстрируется применение белыми ко-борьбы, в которой происходит естественный обмен четырех отмеченных белых камней (11 очков) на группу черных в углу

(20 очков). Черные получают на 7 очков больше по сравнению с позицией на рисунке 29,а. Теперь подсчет очков в пользу белых: 29 против 28 у черных. Из разобранного примера видно, что применение ко-борьбы необходимо в случаях, когда более простая игра не приводит к успеху.

Тэсудзи

Мы уже упоминали, что ходы, использующие наилучшим образом недостатки в построении противника, называются тэсудзи. Знание различных типов тэсудзи очень важно, так как они используются во всех стадиях игры — будь то фусэки, середина или ёсэ.

Разберем несколько наиболее популярных тэсудзи.

Ситё. Так называется один из способов захвата камней. В го существует даже поговорка: «Не знаешь ситё — не умеешь играть в го».

В позиции на рисунке 30 черные ходом 1 захватывают камень белых в ситё. Если белые попытаются убежать от захвата и сыграют в 2, то черные последуют за белыми камнями и сыграют в 3, снова ставя их в положение атари. Белые играют в 4, черные

— в 5 и так далее до хода 17. Здесь белые попадают на край доски, бежать им некуда, и поэтому все их камни оказываются захваченными. Расположение камней во время побега напоминает по конфигурации лестницу, поэтому ситё еще иногда называют лестницей.

Позиция на рисунке 31 очень похожа на предыдущую. Однако если черные и в этом случае попытаются захватить белый камень в ситё, то они потерпят неудачу, так как на пути у них окажется отмеченный камень белых, который называется *ситё-прерыватель*. Прежде чем захватить в ситё, надо посмотреть, нет ли на пути ситё-прерывателя.

В заключение отметим, что ситё не самый лучший способ захвата разрезающих камней. Он применяется лишь в том случае, если нет ничего лучшего. Ведь стоит только появиться *ситё-*

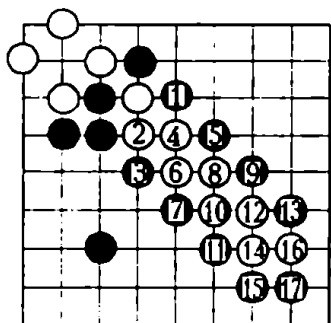


Рис.30

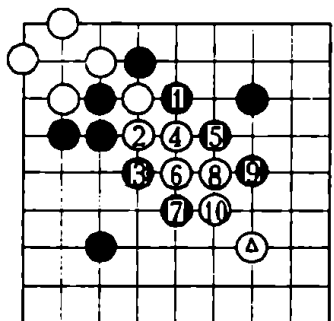


Рис.31

прерывателю, и захваченный камень может вырваться из окружения. Поэтому чаще всего тратят еще один ход для окончательного захвата камня.

Гэта. Так называется другой способ захвата камней — ход 1 на рисунке 32.

Защелка. Одно из наиболее известных тэсудзи, применяемое для захвата камней противника.

На рисунке 33 черные сделали ход 1, пытаясь избежать захвата трех своих камней. На первый взгляд, это им удалось, так как обычные способы съедания камней в точке 3 ни к чему не приведут. Однако у белых имеется тэсудзи. Ходом 2 они жертвуют один камень и затем после ходов 3—6 захватывают камни черных в плен.

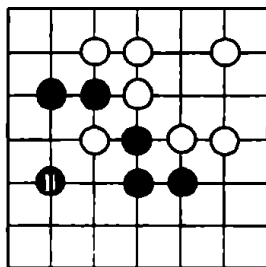


Рис.32

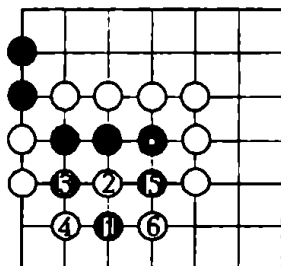


Рис.33

Ёсэ

В заключительной стадии игры вся доска уже разделена на контролируемые игроками территории, но границы их еще до конца не оформлены. Поэтому партнеры стремятся как можно больше увеличить свою территорию и уменьшить территорию противника.

В начале или в середине партии невозможно рассчитать ценность того или иного хода. В конце игры позиция становится более определенной, и такой расчет можно практически сделать для каждого хода, хотя это и бывает довольно трудно.

На рисунке 34 рассмотрен наиболее простой случай расчета ценности хода. Отмеченные черный и белый камни на рисунке 34, а обозначают границы своих территорий, но пограничные камни еще не достигли первой линии доски и территории еще полностью не достроены.

Предположим, что результат партии зависит только от разницы

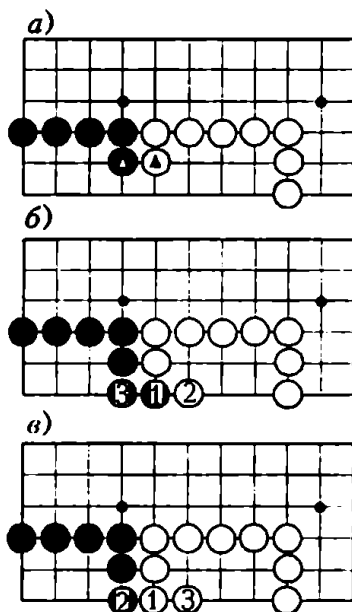


Рис.34

между этими двумя территориями. Тогда все будет зависеть от очередности хода. Если ход черных (рис.34,б), то они завершают свою территорию ходами 1 и 3. Подсчитав очки, можно увидеть, что у черных шесть очков территории, а у белых только пять и черные добиваются победы с перевесом в одно очко. Если же ход белых (рис.34,в), то они ходами 1 и 3 завершают свою территорию. Теперь у них будет шесть очков территории, а у черных пять. Сравнив результаты, мы видим, что разница между ними два очка, т.е. ценность хода на данном участке доски составляет два очка.

Но не всегда так просто подсчитать величину хода. В реальной партии встречаются более сложные ситуации. Рассмотрим одну из них.

На рисунке 35 приведена позиция с неразыгранным местом (в правом верхнем углу), в котором надо рассчитать величину хода. Правильный ход белых — 1. Черные отвечают ходами 2 и 4, после чего белые, сохраняя инициативу, играют в другом месте. Позже черные проведут обмен ходами 6 и 7. Затем белые, в свою очередь, проведут обмен 9 и 10. Подсчитав территорию, мы увидим, что у белых она равняется 23 очкам против 26 у черных.

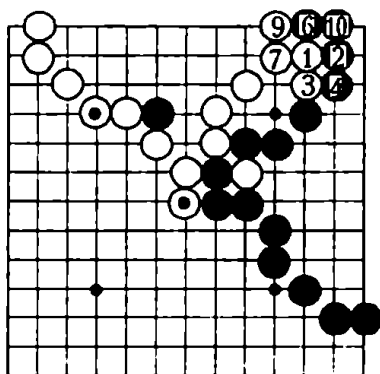


Рис.35

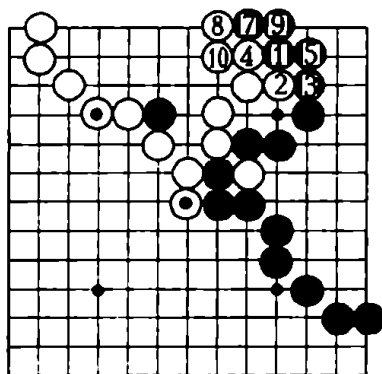


Рис.36

Разобранный пример показывает, что определить величину хода в ёсэ довольно трудно. Однако еще сложнее оказывается не расчет ходов, а их взаимоотношение — с потерей или без потери темпа они делаются.

Если же здесь первыми сыграют черные (ход 1 на рисунке 36), то после обменов (ход 6 сделан в другом месте) белые имеют территорию 19 очков, черные — 30. Разница с предыдущим розыгрышем составляет 8 очков. Следовательно, ценность хода в этой позиции равна 8 очкам. Но обратим внимание, что белые

могут получить эти 8 очков без потери темпа, а черные с потерей.

Возникает вопрос: всегда ли белые ход 1 могут сделать с темпом? Рассмотрим рисунок 37. Если черные не отвечают на ход белых 1 (т.е. играют в другом месте), то те играют в пункт 3 и до хода 8 сохраняют инициативу. В дальнейшем черные без потери темпа делают ходы 10 и 12. После проведения этой операции территория белых составит 28 очков, а черных — 19,5 очка (ход в точку «а» дает одно очко с потерей темпа, и поэтому в расчет берется 0,5 очка).

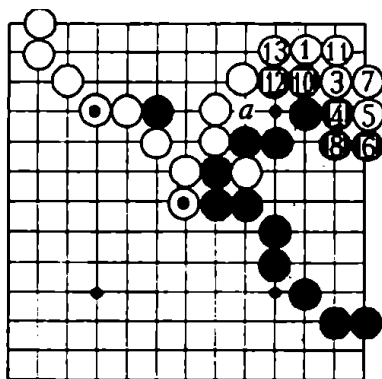


Рис.37

Сравнивая этот результат с двумя предыдущими, видим, что выгода белых теперь составляет 19,5 очка с потерей темпа. Белые могут его делать, когда наибольший ход на доске с потерей темпа равен 19 очкам или меньше.

Для понимания некоторых тонкостей ёсэ рассмотрим два термина — *сэнтэ* и *готэ*.

Сэнтэ называется такой ход, который делается без потери темпа. Соответственно, готэ — ход с потерей темпа.

Существуют три основных сэнтэ-готэ соотношения:

- обоюдное сэнтэ;
- обоюдное готэ;
- сэнтэ-готэ (обратное сэнтэ).

Ситуация на рисунке 34 является примером обоюдного готэ.

Пример сэнтэ-готэ разобран на рисунках 35, 36. Остается рассмотреть обоюдное сэнтэ (рис.38).

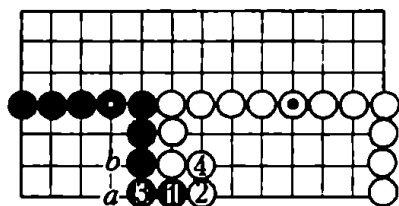


Рис. 38

Здесь, кто бы ни играл первым,

заканчивает в сэнтэ. Это очень хорошие ходы, и оба партнера стараются как можно раньше сыграть их. Поэтому в ёсэ важно не только подсчитать ценность хода, но и определить, какой он — сэнтэ или готэ.

Вы познакомились с основами стратегии и тактики игры го. Может быть, в дальнейшем эта игра окажется вашим увлечением на долгие годы, а может быть, и нет. Но нам кажется, что она способна доставить много удовольствия.

Всем знакома детская игра крестики-нолики: на поля доски 3×3 двое по очереди ставят крестики и нолики, и выигрывает тот, кто первым выстроит три своих знака в ряд. Если никому не удастся добиться этой цели, партия заканчивается вничью. Инициатива принадлежит крестикам, но простой анализ показывает, что правильная игра всегда приводит к ничьей. Поэтому обычные крестики-нолики быстро надоедают, и возникает естественное желание придумать что-нибудь новенькое.

Можно, например, играть в поддавки (доска 3×3 позволяет и это): здесь, наоборот, тому, кто первым выставит ряд из трех своих знаков, засчитывается поражение. В такой игре инициатива — у ноликов, но теперь у крестиков есть надежная ничейная стратегия: на первом ходу они могут занять центральное поле и затем симметрично повторять ходы партнера.

Куда интереснее другой вариант крестиков-ноликов (А. Остин назвал его «безумными крестиками-ноликами»). Каждый игрок при своем ходе ставит либо крестик, либо нолик — что ему заблагорассудится. Побеждает тот, кто первым закончит ряд из одинаковых знаков, безразлично каких. Однако здесь игроки оказываются в неравном положении: начинающий форсированно выигрывает (убедитесь в этом сами). Забавно, но можно играть и в «безумные поддавки»: ходят по-прежнему любыми знаками, но тот, кто первым образует ряд из трех одинаковых знаков, проигрывает. Как и в обычных поддавках, пользуясь симметрией, первый игрок гарантирует себе ничью.

Вот еще одни крестики-нолики (все на той же маленькой доске!), предложенные Д. Силверманом. Играть можно любыми знаками, как в уже описанном «безумном» варианте. Но теперь один из противников считается выигравшим, если он сможет свести игру к обычной ничьей (когда ни у кого не получается ряда из трех одинаковых значков), а другой — если на доске образу-

ется ряд из трех знаков. Докажите сами, что играющий «пормальному» побеждает независимо от того, кто ходит первым.

Следующий вариант можно рассматривать как вступление в целый класс «гибридных» игр – помесей крестиков-ноликов и шашек. Партнеры по очереди ставят три своих крестика и нолика. Если никто не выстроил три знака в ряд, игра продолжается. Теперь каждым ходом игрок может передвигать свой значок на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Выигрывает тот, кто сумеет первым расположить три своих знака в ряд. Конечно, удобнее не рисовать крестики и нолики карандашом, а пользоваться шашками – белыми и черными. Нетрудно убедиться, что в такой игре право первого хода дает решающее преимущество.

Как видите, даже такая маленькая доска может служить неиссякаемым источником для изобретения игр.

Так-тиль – простейшая гибридная игра на доске 4×4 . У каждого из противников по четыре шашки (рис.1), и игроки по очереди перемещают их по горизонтали и вертикали. Выигрывает тот, кто первым расположит три своих шашки в ряд.

Вот пример партии в так-тиль. 1.c1 – c2 d1 – c1 2. b4 – b3 b1 – b2 3.b3 – a3 (иначе, встав на поле a3, черные сразу выиграли бы) 3...a4 – b4 4.a1 – b1 – белые выиграли, так как черные не в силах помешать маневру 5.d4 – d3.

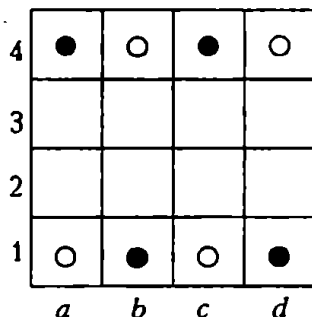


Рис. 1

С помощью компьютера доказано, что так-тиль – игра ничейная: ни одному из партнеров не удастся поставить три шашки в ряд (если нет ошибочных ходов).

К подобным играм относятся различные варианты «мельницы», болотуду и т.д.

До сих пор во всех рассмотренных играх партия сразу кончалась с первым выстроенным рядом. Для тех, кому это покажется слишком скучным, придумана еще одна вариация все тех же крестиков-ноликов. На доске 6×6 партнеры по очереди ставят свои значки, получая очко за каждую построенную тройку крестиков или ноликов (по горизонтали или вертикали). Каждое поле доски учитывается дважды – один раз по вертикали и один раз по горизонтали. Выигрывает тот, кто наберет больше очков. Игра заканчивается, когда ходить больше некуда – вся доска заполнена.

Более увлекательны игры в крестики-нолики, в которых победу приносят не три знака, поставленные в ряд, а четыре или пять. В игре «4 в ряд» на доске 4×4 ноликам сделать ничью еще проще, чем на доске 3×3 . Для доски 5×5 крестики-нолики давно запрограммированы на компьютере. Машина действует безукоризненно: ничьей добивается любыми значками, а при невнимательной игре человека побеждает. Доказано, впрочем, что на доске 5×5 игра ничейна.

Теперь настала пора рассказать о самых популярных крестиках-ноликах – на бесконечном поле. Двое по очереди ставят свои знаки на клетчатой бумаге, стремясь поставить в ряд (по вертикали, горизонтали или диагонали) пять своих знаков. Реально, конечно, поле ограничено – обычно это просто тетрадный листок. В эту игру охотно играют и школьники, и студенты, и доктора наук; а придумана она была четыре тысячи лет назад, задолго до появления тетрадей в клетку (вместо крестиков и ноликов использовались камушки двух цветов)... Кстати, старинные игры гобанк и гомоку отличаются от бесконечных крестиков-ноликов только наличием специальных досок 19×19 или 15×15 , а роль значков играют фишки.

В большинстве рассмотренных игр нолики борются за ничью, а крестики (начинающая сторона) всегда могут ее достичь. Это интуитивно подмеченное правило подтверждает следующая теорема: *при правильной игре в крестики-нолики «n в ряд» на произвольной доске $n \times n$ начинающему гарантирована ничья при любом n.*

Это легко доказать от противного. Предположим, что как бы ни играли крестики, нолики применяют некую выигрышную стратегию и побеждают. Тогда начинающему достаточно поставить на любое место свой первый крестик, а дальше применять стратегию партнера, мысленно поменяв знаки. Если в какой-то момент эта стратегия потребует от него поставить крестик на поле, занятое поставленным ранее крестиком, он ставит свой значок на произвольное поле – лишний крестик никогда не мешает. По предположению, нолики должны выиграть. Но ведь крестики как бы играют ноликами, да еще имеют лишний значок, значит, они тоже должны выиграть. Получили противоречие.

Итак, в игре «5 в ряд» на бесконечной доске крестикам гарантирована ничья. А могут ли они форсированно выиграть? На практике инициатива обычно принадлежит крестикам, но и нолики часто берут верх. Однако в японских книжках по рэндзю (об этой самой популярной в мире модификации крестиков-

ноликов мы поговорим как-нибудь в другой раз) приводится исчерпывающий анализ, из которого следует, что крестики форсированно выигрывают. Решающий перевес они получают к десятому ходу, а к пятнадцатому завершают построение необходимого ряда из пяти своих знаков.

Хотя эти теоретические рассуждения вряд ли отпугнут любителей крестиков-ноликов, все же не приходится говорить о серьезных состязаниях, если доказан выигрыш одной из сторон. Поэтому и были придуманы некоторые дополнительные правила, при которых результат игры не так очевиден, принятые в шашках рэндзю.

Посмотрим, как обстоит дело в крестиках-ноликах « n в ряд» при n , больших пяти.

Еще в 1954 году Г. Поллак и К. Шеннон доказали, что при любом $n \geq 9$ у ноликов есть гарантированная ничья. Позже А. Хэйли и Р. Джуитт придумали простой и эффективный алгоритм ее достижения. Всю бесконечную доску надо мысленно разбить на квадраты 8×8 и в каждом из них провести линии, как показано на рисунке 2. В результате все поля доски оказываются разбитыми на пары. Теперь после хода крестиков на некоторое поле противник должен поставить свой нолик на «парное» поле.

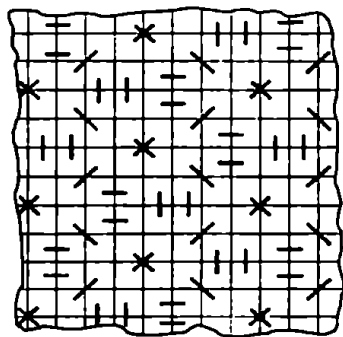


Рис. 2

Такая стратегия гарантирует ноликам ничью. Действительно, наше покрытие плоскости квадратами 8×8 обладает тем свойством, что в произвольном ряду из девяти соседних полей обязательно найдутся два связанных между собой линией. Это значит, что если одно поле данной пары занято крестиком, то на другом обязательно стоит нолик. Итак, никакие девять полей в одном ряду (а тем более больше) не могут быть заполнены одними крестиками, и партия заканчивается вничью.

К сожалению, эта изящная стратегия неприменима для $n < 9$. Правда, более сложным способом доказано, что игра «8 в ряд» тоже ничейна. Что же касается игр «7 в ряд» и «6 в ряд», то вопрос остается открытым. Впрочем, А. Давлицаров и О. Степанов доказали ничейность придуманных ими экваториальных крестиков-ноликов «7 в ряд» (на плоскости выбирают определенное направление — это и есть экватор, — параллельно которому семь одинаковых знаков в ряд не считаются выигрышем).

а)

\	—		—	/
	—	—		
—				—
/	—		—	\

б)

\	—			—	/
	\	—	—	/	
—		\	/		—
—		/	\		—
	/	—	—	\	
/	—			—	\

Рис. 3

Для $n = 5$ на поле 5×5 срабатывает метод Хэйла и Джуитта. Все поля доски (кроме центрального) разбиваются на пары так, как показано на рисунке 3, а. Теперь после каждого хода крестиков вне центра доски нолики занимают парное ему поле — с той же пометкой и в направлении, указанном линией на поле крестиков. При такой игре нолики даже могут дать крестикам фору — позволить им занять центральное поле и еще одно какое-нибудь. В конце концов в каждом ряду из пяти полей будет стоять хотя бы один нолик, и ничья обеспечена.

Аналогично достигается и ничья в игре «6 в ряд» на доске 6×6 (рис. 3, б). Здесь ответный ход ноликов по диагоналям квадрата может быть любым. Покрывтие Хэйлса и Джуитта в этом случае зеркально симметрично относительно двух выделенных линий.

В одном из выпусков шахматной странички «Кванта» приводились задачи, в которых в какой-то момент доска поворачивалась. Это меняло направление движения пешек, а следовательно, приводило к другой позиции. Возникает естественная для математика мысль: рассмотреть вариант игры, в котором преобразование шахматного пространства было бы настоящим ходом. Одну из реализаций этой идеи можно получить на кубике Рубика — шахматный кубик Рубика, или, сокращенно, шакур.

Игра будет поверхностной (в геометрическом смысле), «доска» состоит из 54-х клеток. В каждой вершине кубика встречаются три клетки, поэтому мы не сможем сохранить обычную пятнистую раскраску и будем считать доску одноцветной (белой), а фигуры — красными и черными (рис. 1).

Оживим шахматные фигуры (все, кроме пешек, которые нам пока не понадобятся, так как сегодня мы рассмотрим самый простой вид игры — матование одинокого черного короля). Фигура (король, ферзь, ладья, слон или конь) может пойти с поля *A* на поле *B*, если на какой-нибудь развертке кубика фигура может попасть с *A* на *B* по

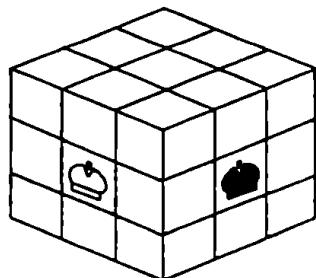


Рис. 1

обычным шахматным правилам, однако слону запретим ходить с одной клетки на другую, если у них есть общая сторона. Аналогичное исключение сделаем и для диагональных ходов ферзя, иначе эти фигуры были бы слишком мощными.

Чтобы читателю было проще освоиться с геометрией нашей шахматной доски, рекомендуем сделать комплект шакурных фигур, состоящий из кубика Рубика и фигур-наклеек, изготовленных с помощью любой клейкой ленты.

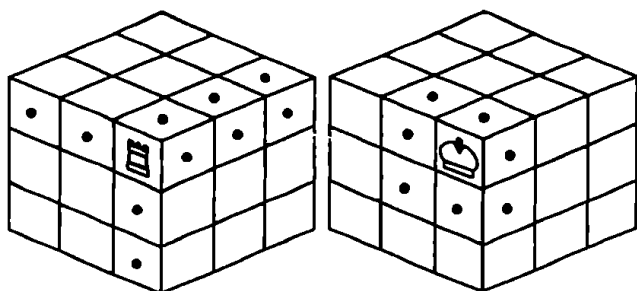


Рис. 2

Самые простые ходы (и соответствующие развертки) у ладьи и короля (рис.2). В дальнейшем на рисунках будем отмечать точками поля на «видимых» гранях, доступные фигуре.

У слона, если он не занимает центральную или угловую клетку грани, битые поля образуют два диагональных меридиана, пересекающихся в двух полюсах-антиподах. На рисунке 3 изображены два слона, расположенные в таких полюсах и имеющие одинаковые траектории.

Задача 1. Нарисуйте развертку куба для определения одного хода-меридиана слона С, из позиции на рисунке 3.

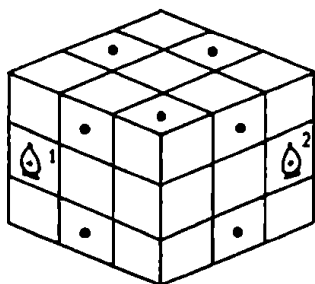


Рис. 3

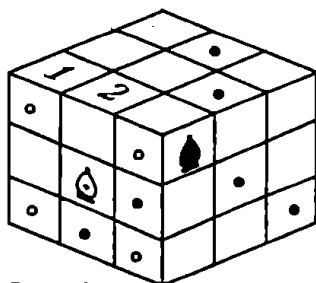


Рис. 4

Возможности слона, расположенного в центральной или угловой клетке грани, показаны на рисунке 4.

Задача 2. Проверьте, что за несколько ходов слон может попасть с любого поля доски на любое другое. За какое наименьшее число ходов слон может попасть с поля 1 на поле 2 (см. рис.4)?

Задача 3. Разберите свойства ферзя.

Даже на обычной доске кони выделяются своими коварными ходами, на кубике их ходы еще неожиданнее (см. рис.5).

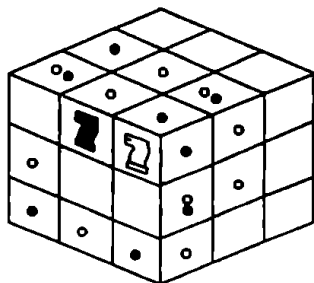


Рис. 5

Отметим, что описанным образом можно определить ходы фигур на поверхности клетчатого кубика с гранями размером $n \times n$, а не только 3×3 . На такой доске можно решать обычные задачи с «активными» движениями фигур. Например, докажите, что красные король и ладья могут заматовать одинокого черного короля; заключительная позиция может быть такой, как на рисунке 6.

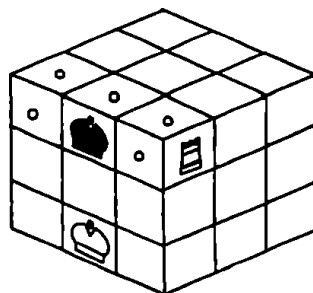


Рис. 6

Любопытно, что перевес в ладью, минимально достаточный для победы над одиноким королем на обычной доске, оказывается достаточным и на кубике! Еще более неожиданным является то, что на кубике 3×3 можно придумать матовые позиции, в которых кроме королей с сильнейшей стороны участвуют два слона, слон и конь, два коня — опять так же, как на обычной доске.

На рисунке 7 изображена матовая позиция; символ ∞ в клетке доски означает, что слон находится на далеком поле-

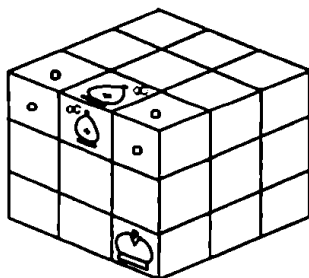


Рис. 7

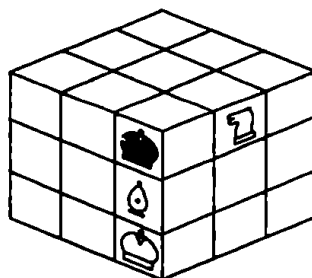


Рис. 8

антиподе, а как мы знаем, действует такой слон-двойник так, как если бы он находился в выделенной клетке. Из рисунка 8 видно, что вместе с красным королем слоны-невидимки отрезают черному королю все пути для бегства, а один из них еще и объявляет шах — на доске мат.

Приведем без комментариев еще несколько матовых позиций.

В позиции на рисунке 9 нам не удастся повернуть кубик так, чтобы все фигуры были на видимых гранях. Красный король расположен на невидимой нижней грани кубика, часть

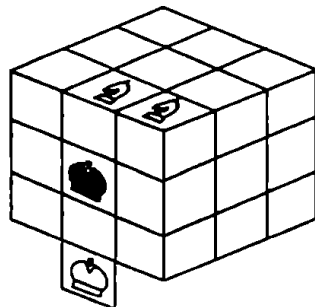


Рис. 9

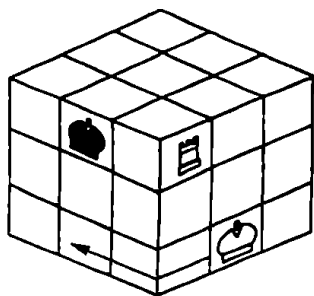


Рис. 10

которой изображена в виде развертки.

Можно было бы и дальше рассматривать «обычные» шахматные ходы на кубике и решать соответствующие задачи, но у нас в этой заметке другая цель — использовать динамические возможности кубика Рубика.

Назовем две позиции совместимыми, если одну можно получить из другой вращениями граней кубика. Например, позиция, изображенная на рисунке 6, совместима с позицией на рисунке 10.

Теперь мы можем, наконец, сформулировать условия игры шакур: *из заданной расстановки красных и черных фигур получить вращениями граней кубика совместимую с ней позицию, в которой на доске стоял бы мат черному королю.*

Решение такой задачи будет состоять из двух частей: сначала надо придумать матовую позицию, а потом получить ее, делая ходы-вращения.

Подчеркнем, что фигуры будут двигаться только вместе с доской.

Для желающих придумывать задачи отметим, что при большом числе черных фигур их роль будет двойкой: они могут

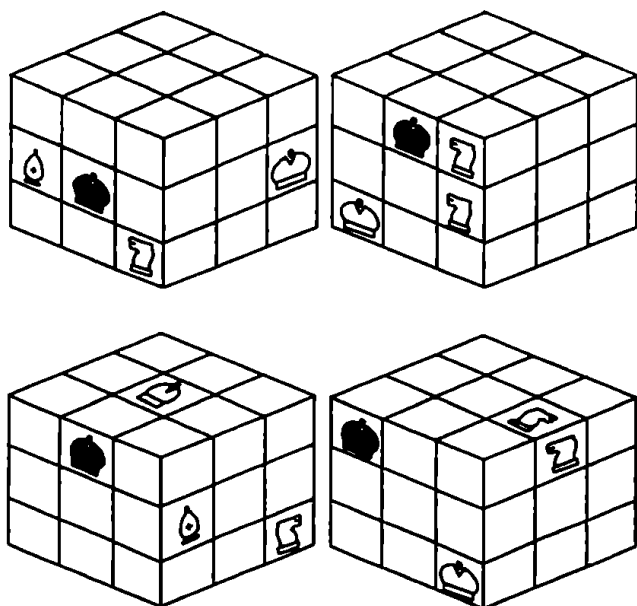


Рис. 11

разрушать атаки красных фигур, но могут и ограничивать подвижность своего же черного короля.

Как и в обычной шахматной композиции, можно было бы ввести ограничения на число ходов-вращений («мат в два хода»), но мы этого делать не станем.

В заключение предлагаем читателям еще четыре задачи (рис.11) с одинаковым этюдным заданием: найти выигрыш в игре шакур, т. е. заматовать черного короля вращениями кубика Рубика (на невидимых гранях фигур нет).

ОТВЕТЫ

«Ставь на минус!»

Контрольные вопросы

- а) d6; б) h3; в) a7; г) h8.
- а) I – 5, II – 4; б) I – 1, II – 2; в) I – 4, II – 0.

Задачи

- Минусы стоят на полях с нечетными номерами и по горизонтали, и по вертикали.
- Минусы стоят на полях, у которых разность номеров горизонтали и вертикали делится на 3.
- На поле стоит минус, если сумма номеров горизонтали и вертикали при делении на 3 дает в остатке 1.
- См. рис.1.
- Минусы стоят на полях, у которых номера и горизонтали, и вертикали при делении на 4 дают остаток 1 или 2.

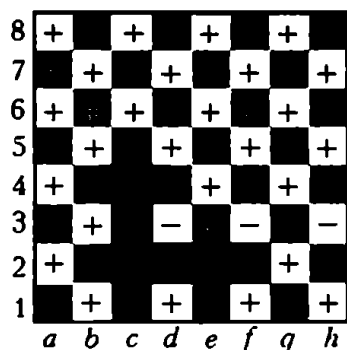


Рис. 1



Рис. 2

- Минусы стоят только на главной диагонали (у полей которой номер горизонтали равен номеру вертикали).
- См. рис.2 (в случае г) период начинается с пятой клетки, во всех остальных – с первой).
- а) Пусть на клетке с номером n (короче: «клетке n ») стоит минус. Тогда на клетках $n + a$ и $n + b$ стоят плюсы, поскольку с них можно пойти

на клетку n , а на поле $n + a + b$ стоит минус, так как с него можно попасть только на клетки $n + a$ и $n + b$.

Пусть теперь на клетке n стоит плюс. Тогда в соответствии с «золотыми правилами» на поле $n - a$ или на поле $n - b$ стоит минус. Если на $n - a$ стоит минус, то, как доказано, на клетке $n - a + (a + b) = n + b$ также стоит минус, а на клетке $n + a + b$ — плюс, так как с нее можно попасть на $n + b$. Случай, когда минус стоит на $n - b$, разбирается аналогично.

Итак, расстановка плюсов и минусов периодична и полностью определяется расстановкой первых $a + b$ знаков.

б) Рассмотрим первые $a + b$ клеток. Пусть для определенности $a < b$. Расстановка знаков на первых b полях определяется только ходом a клеток и потому такова: a минусов, a плюсов, a минусов, a плюсов... Поскольку ход на b клеток влево с полей с номерами $b + 1, \dots, a + b$ ведет на один из первых a минусов, то на этих клетках стоят a плюсов. Они следуют за a минусами тогда и только тогда, когда $b = a(2n + 1)$ (n — целое).

Итак, длина периода равна $2a$, если $b = a(2n + 1)$, и равна $a + b$ в противном случае.

9. Как следует из решения задачи 8, количество минусов в начале равно a , а больший ход имеет длину, равную длине периода, минус a . Так, на рисунке 7 в статье $a = 2, b = 7 - 2 = 5$.

Но если получается $b = a$, т.е. периодичность сводится к чередованию a минусов и a плюсов, то меньший ход равен именно a , а про больший можно сказать лишь, что он равен $a(2n + 1)$, где n — натуральное число.

10. Пусть n — наибольшая длина хода. Тогда для того, чтобы отметить поле плюсом или минусом, достаточно знать знаки лишь на предыдущих n полях. Разобьем полоску на последовательные группы по n клеток. По принципу Дирихле расстановка знаков в каких-то двух группах совпадает. Пусть эти две группы начинаются с клеток k и p соответственно, причем $k < p$. Тогда расстановка знаков на клетках $k, k + 1, \dots, p - 1$ совпадает с расстановкой на клетках $p, p + 1, \dots, p + (p - k - 1)$, и т.д. Другими словами, имеется период длины $p - k$, начинающийся с клетки k .

11. На рисунке 8,а в статье вторая клетка отмечена плюсом, следовательно, есть ход на 1 клетку влево. Третья также отмечена плюсом — есть ход на 2 клетки влево. Наконец, седьмая клетка отмечена плюсом — есть ход на четвертую или на первую клетку. Если на четвертую, то этот ход — на 3 клетки влево. Но тогда на четвертой клетке вопреки рисунку должен стоять плюс. Следовательно, есть ход на 6 клеток влево. Итак, этот рисунок соответствует игре, в которой ходить можно на 1, 2 или 6 клеток влево.

Могут ли быть другие игры с такой же расстановкой плюсов и минусов? Да, конечно. Например, игра, в которой ходить можно на 1, 2, 6 или 13 клеток влево или на 1, 2, 5 или 6 клеток влево.

Рисунки 8,б,в (в статье) соответствуют играм с ходами на 1, 4 или 7 клеток влево и на 2, 4 или 7 клеток влево.

12. Не всегда — это сразу следует из рисунка 9,б в статье. Судя по его первым трем клеткам, в игре должны быть ходы на 1 и 2 клетки влево, но это противоречит дальнейшей расстановке знаков.

МАТЕМАТИКА И ИГРЫ

Составитель *А.Ю.Котова*

Редактор *А.Ю.Котова*

Литературный редактор *Л.В.Кардасевич*

Технический редактор *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ИБ № 58

Подписано к печати 04.03.02. Формат 84×108 1/32. Бум. офс. нейтр.

Гарнитура кудряшевская. Печать офсетная. Объем 8 печ.л.

Тираж 4 900 экз. Заказ 2197.

117296 Москва, Ленинский пр., 64-А,

«Квант»

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени

ГУП «Чеховский полиграфический комбинат»

Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и
средств массовых коммуникаций

142300, г.Чехов Московской области

Тел. (272) 71-336. Факс (272) 62-536